Der binomische Lehrsatz

Paper

Ravinthrarasa Rosshan

22. März 2026

Vorwort

Die Algebra und Stochastik könnte gedanklich nicht weiter sein. Viele Lehrpläne beginnen mit der Algebra und enden mit der Stochastik. Dennoch gibt es eine Auffälligkeit: die binomischen Formeln, der Binomialkoeffizient, die Binomialverteilung. Namentlich sind sie gleich, aber mathematisch ist das sozusagen die magische Brücke zwischen der Algebra und der Stochastik, welche in diesem Paper genauer untersucht wird.

Der binomische Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

wobei der Binomialkoeffizient durch die Fallunterscheidung

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{für } 0 \leq n < k \end{cases}$$

definiert ist. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002, S.129ff)

Anwendung in der Algebra

Die Vereinfachung von Binomen zweiten Grades erfolgt entweder typischerweise durch die Termumformung oder auch durch die Anwendung des binomischen Lehrsatzes. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002, S.125ff; Durandi u. a. 2022, S.20, S.43)

Beweisführung durch Termumformung

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= (a \pm b)(a \pm b) \\ &= a \cdot a \pm a \cdot b \pm b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 \pm ab \pm ab + b^2 \\ &= a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

Beweisführung durch Lehrsatz

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^{2-k}b^k = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^2b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 \\
&= \frac{2!}{0!(2-0)!}a^2b^0 + \frac{2!}{1!(2-1)!}a^2b^1 + \frac{2!}{2!(2-2)!}a^0b^2 \\
&= \frac{2!}{2!}a^2b^0 + \frac{2!}{1!}a^1b^1 + \frac{2!}{2!}a^0b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^{2-k}(-b)^k = \binom{2}{0}a^2(-b)^0 + \binom{2}{1}a^2(-b)^1 + \binom{2}{2}a^0(-b)^2 \\
&= \frac{2!}{0!(2-0)!}a^2(-b)^0 + \frac{2!}{1!(2-1)!}a^2(-b)^1 + \frac{2!}{2!(2-2)!}a^0(-b)^2 \\
&= \frac{2!}{2!}a^2(-b)^0 + \frac{2!}{1!}a^1(-b)^1 + \frac{2!}{2!}a^0(-b)^2 \\
&= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d}
\end{aligned}
$$

Binome höheren Grades und der Pascal'sche Dreieck

Binome höheren Grades können durch den PASCAL'sche Dreieck vereinfacht werden, wobei diese Herleitung equivalent zur Herleitung durch den binomischen Lehrsatz ist.

									1								
$n=1$								1		1				k	$=3$		
$n=2$							1		2		1		$\swarrow$		k		
$n=3$						1		3		3		1		$\swarrow$		k	
$n=4$					1		4		6		4		1		$\swarrow$		k
$n=5$				1		5		10		10		5		1		$\swarrow$	
$n=6$			1		6		15		20		15		6		1		
$n=7$		1		7		21		35		35		21		7		1	
$n=8$	1		8		28		56		70		56		28		8		1

Tabelle 1: PASCAL'sche Dreieck

Der Zweck des PASCAL'schen Dreiecks ist das nähere Bestimmen der Binomialkoeffizienten (gegeben durch n und k) und somit auch die Koeffizienten der vereinfachten Terme, wobei die Exponenten der Variablen weiterhin auf den binomischen Lehrsatz (gegeben durch $n-k$ und k) basieren.

Anwendung in der Stochastik

Beim sogenannten BERNOULLI-Experiment handelt es sich um ein Zufallsexperiment, der sich um die Fragestellung, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Versuchen das Ereignis E eintritt, beschäftigt. Bei der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit wird nun der binomischer Lehrsatz verwendet. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002, S.657ff; Durandi u. a. 2022, S.121)

$$P(X=x) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k$$

Bei dieser Anwendung werden die Variablen zur Wahrscheinlichkeit p geändert und der binomische Lehrsatz wird zusätzlich von der Zufallsvariable definiert (und das Summenzeichen wird gestrichen beim Fall, dass x genau ist und nicht „höchstens“, „weniger als“ etc.).

Der Zweck der Multiplikation der Gegenwahrscheinlichkeit liegt im Ursprung der Binomialverteilung. Die Binomialverteilung rechnet die Wahrscheinlichkeit eines Ereignis E bei n Wiederholungen. Das heisst, dass es sowohl Erfolge gibt, die man intuitiv mit p berechnet, aber es gibt auch die Misserfolge (ausgedrückt durch $1 - p$), die ebenfalls einberechnet werden müssen, da die Aufgabenstellung und folgerichtig die Binomialverteilung dies schlicht verlangt.

Der Zusammenhang

Die Frage ist nun: Wieso werden für diese beiden sichtlich nicht zusammenhängenden Situation die gleiche Formel benutzt? Aus Sicht der Mathematik funktionieren in beiden Situationen das gleiche.

	Algebra	**Stochastik**
a	Variable	Misserfolg $(1 - p)$
b	Variable	Erfolg (p)
$\binom{n}{k}$	Koeffizienten	Anzahl Anordnungen
$a^{n-k}b^k$	Zwischenterme	P eine Folge

Tabelle 2: Analogie: Binomischer Lehrsatz in der Algebra und Stochastik

In beiden Fällen werden, abstrakt formuliert, alle Möglichkeiten zusammengerechnet. Sei es bei den Binomen oder auch bei der Binomialverteilung. Als grosser Indiz dafür reicht schon der Exponent $n - k$, der schon einiges aufzeigt.

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Delventhal, Katja Maria, Alfred Dipl. Ing. Kissner und Malte Kulick (2002). *Grosser Ratgeber, Mathematik.* Trautwein Edition. Compact Verlag München: Katja Maria Delventhal. ISBN: 3-8174-5296-9.

Durandi, Werner u. a. (2022). *Formeln, Tabellen, Begriffe (Mathematik - Physik - Chemie) [Teil Mathematik].* 8. aktualisierte Auflage. Orell Füssli Verlag: Werner Durandi. ISBN: 978-3-280-04029-4.