Die Gerade

Paper

Ravinthrarasa Rosshan

11. April 2026

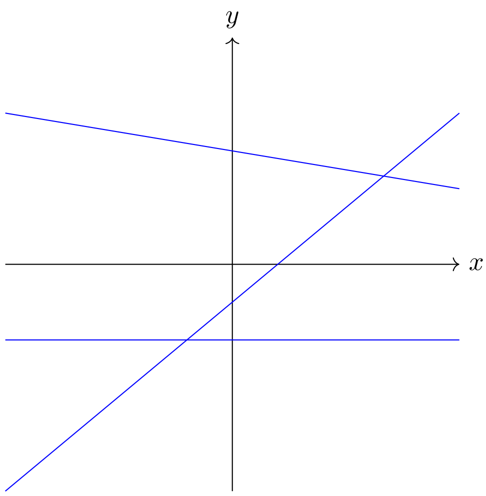
Vorwort

Die Gerade kennt man. Auch aus dem Alltag. Etwas ist gerade, also ist dies eine Gerade. In der Mathematik ist die Gerade ebenfalls bekannt. Aber in zwei Kontexten: Analysis und Geometrie. Beide erfüllen verschiedene Zwecke und werden verschieden formuliert, aber das Ergebnis ist das Gleiche. In dieser Arbeit wird der Zusammenhang der Geraden in der Analysis und in der Geometrie untersucht.

Die Gerade

Eine Gerade ist ein Objekt, welche grundsätzlich eine gerade, unendlich lange, unendlich dünne und in beide Richtungen unbegrenzte Linie ist. So lautet (sinngemäss) die Definition von Euklid. Grundlegend handelt es sich um eine Gerade mit einer Länge, aber ohne einer Breite. Heutzutage ist die Gerade ein Objekt ohne innere Eigenschaften, lediglich die Beziehungen zu anderen Geraden, Punkten und Ebenen sind von Bedeutung. (Wikipedia 2026)

Geraden können folgendermassen im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden.



Anwendung in der Analysis

Zwei veränderliche Grössen können einander zugeordnet werden, wen sie voneinander abhängig sind. [...]. Eine Funktion ordnet einem Eingangswert genau einen Ergebniswert zu. Der Ergebniswert wird Funktionswert (typischerweise y) genannt. Diese Zuordnung muss eindeutig sein, d.h.

einem Eingangswert gehört genau ein Funktionswert. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002; S.199)

Genauer gesagt: Der Graph ist die Gerade mit Steigung m und Ordinatenabschnitt q. (Durandi u. a. 2022; S.22).

Die Funktionsgleichung

Die Funktionsgleichung der Geraden entspricht,

$$f(x) = mx + q$$

wobei $m \neq 0$ entspricht und es eine Nullstelle

$$x_0 = -\frac{q}{m}$$

gibt.

Aus dieser Funktionsgleichung kann man die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

und den y-Achsenabschnitt q ablesen.

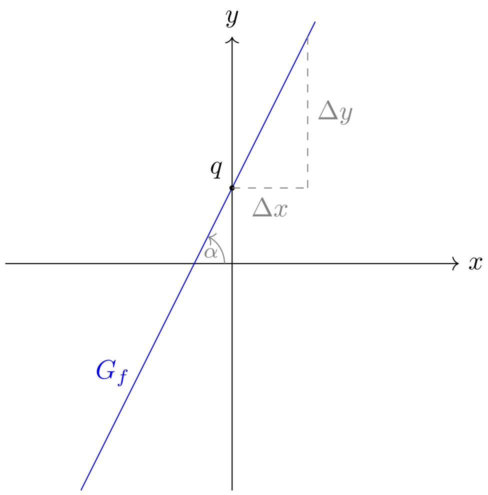
Für Funktionsgleichungen gelten folgende Regeln:

1. Lineare Funktionen haben genau eine Variable (hier: x).
2. Die Variable einer linearen Funktion hat die Potenz Eins ($x^1 = x$).
3. Die Variable einer linearen Funktion hat einen *Koeffizient* m.
4. Lineare Funktionen können zusätzliche Konstante q haben.
5. Die Grundmenge von linearen Funktionen ist in der Regel $\mathbb{R}$.

(Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002; S.204)

Darstellung

Eine Gerade kann mit seinen Komponenten aus der Funktionsgleichung $g\ :\ y = mx+q$ abgebildet werden. Hier am Beispiel von G_f von $f(x) = mx + q$. Zu sehen sind q (y-Achsenabschnitt) und m (in Form des Steigungsdreiecks und des Winkels α).



Gebrauch

An der Geraden kann man die Steigung und den y-Achsenabschnitt (Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse) berechnen.

Die Gerade selbst kann auch Objekt der Berechnung sein. Zwei Anwendungen wären...

1. ... Tangente:
   Die allgemeine Form der Tangente einer Funktion $f(x)$ entspricht,
   $$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
   wobei $f'(x)$ der ersten Ableitung und somit der Steigung entspricht.
2. ... Polstellen: Die Polstellen bei einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x)$ entspricht,
   $$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$
   wobei die Polstelle auch als Nullstelle der Nennerfunktion $g(x)$ betrachtet werden kann.

Anwendung in der Geometrie

Die Geradengleichung

In der Geometrie wird die Gerade durch Vektoren dargestellt, wie Vektoren auch andere Objekte im Raum bzw. in der Ebene darstellen. Die Gleichung, die diese Darstellung am besten wiedergibt, ist die Parameterdarstellung.

$$g \ : \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB}$$

mit:

- $\overrightarrow{OA}$: Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunkts).
- $\overrightarrow{AB}$: Richtungsvektor (Verbindungsvektor des Stückpunkts und eines anderen Punkts).
- s: Parameter, welchen den Richtungsvektor unendlich lang streckt und daraus nun die Gerade folgt.

Nebst dieser Darstellung gibt es auch die Koordinatenform,

$$ax + by + c = 0$$

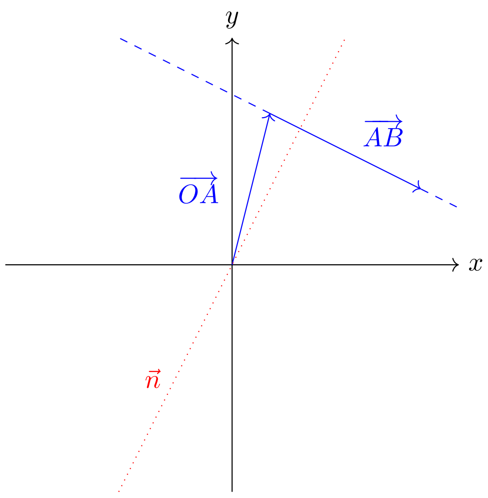
dessen Parameter die Komponente der Normalen

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

darstellen.

Darstellung

Die Gerade können entweder in einer Ebene (zweidimensional) oder im Raum (dreidimensional) dargestellt werden. Dafür werden die Vektoren aus der Parameterform analog in ein Koordinatensystem übernommen. Die Darstellung der Geraden aus der Koordinatenform funktioniert nur in der Ebene, da der Normalenvektor nur zwei Komponente hat und somit nur zweidimensional sein kann.



Gebrauch

An der Geraden selbst erreicht man jeden Punkt auf der Gerade durch Vektoraddition mit einem bestimmten Parameter s_0.

Die Gerade ist zudem auch selbst das Objekt der Berechnungen. Ein grosser Aufgabenbereich sind Abstandsprobleme, in denen der Abstand eines Geradenpunkts an einem Objekt (bspw. eine Ebene) von einem anderen Geradenpunkt an einem anderen Objekt (bspw. ein Punkt) gemessen wird.

Der Zusammenhang

Die resultierende Gerade ist in beiden Anwendungen dasselbe und entsprechen ebenfalls der Definition. Die Funktionsgleichung aus der Analysis und die Geradengleichung sind sogar identisch bzw. umformbar, was den Zusammenhang der Geraden aus den beiden Themenbereichen endgültig mathematisch unterstreicht.

Geometrie → Analysis

$$
\begin{aligned}
g \ : \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot & \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}} \\
\Rightarrow \vec{n} = & \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} \\
\Rightarrow 0 = & (-\Delta y)x + (\Delta x)y + c = ax + by + c \\
\Rightarrow 0 = & ax + by + c \Rightarrow y = -\frac{ax + c}{b} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Analysis → Geometrie

$$
\begin{aligned}
& y = mx + q \Rightarrow y = ax + c \\
& 0 = ax - y + c \qquad \text{Koordinatenform q.e.d.} \\
\Rightarrow\ & \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\vec{r}}_{\overrightarrow{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\
& \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB}
\end{aligned}
$$

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ ist schlichtweg ein beliebiger Punkt, der auf der Ursprungsgeraden liegt.

Fazit

Diese Beweisführungen schlussendlich, dass die Gerade aus der Analysis und die Gerade aus der Geometrie im Prinzip dasselbe und auch untereinander umformbar sind.

Literaturverzeichnis

Delventhal, Katja Maria, Alfred Dipl. Ing. Kissner und Malte Kulick (2002). *Grosser Ratgeber, Mathematik*. Trautwein Edition. Compact Verlag München: Katja Maria Delventhal. ISBN: 3-8174-5296-9.

Durandi, Werner u. a. (2022). *Formeln, Tabellen, Begriffe (Mathematik - Physik - Chemie) [Teil Mathematik]*. 8. aktualisierte Auflage. Orell Füssli Verlag: Werner Durandi. ISBN: 978-3-280-04029-4.

Wikipedia (2026). *Gerade*. [Letztes Mal geöffnet: 11.04.2026]. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Gerade`.