Folgen & Reihen - Grundlagen

Rosshan Ravinthrarasa

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Formelverzeichnis

- S.38 | Zahlenfolge
- S.39 | Partialsummenfolge
- S.39 | Arithmetische Folge 1.Ordnung
- S.40 | Geometrische Zahlenfolge
- S.53 | Unendliche geometrische Reihe

1 Einführung

Eine reelle Zahlenfolge besteht aus unendlich vielen reellen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ die in einer festen Reihenfolge angeordnet sind – so wie die einzelnen Perlen auf einer unendlich langen Schnur. Die Zahl mit dem Index n also die Zahl a_n, steht dabei an der n-ten Stelle in der Reihenfolge und heisst daher n-tes Folgeglied.

Für die Zahlenfolge als Ganzes verwendet man die Kurzschreibweise (a_n).

Es gibt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für eine Zahlenfolge. Hier am Beispiel bei ungeraden Zahlen:

- Aufzählende Form
  Notieren der ersten paar Glieder, bis die Eindeutigkeit der Folge ersichtlich ist (ungefähr 5 Folgeglieder sollten reichen):
  $$(a_n) = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$
- Explizite Darstellung
  $$a_n = 2n + 1$$
- Rekursive Darstellung
  $$a_{n+1} = a_n + 2 \qquad \text{mit } a_1 = 3$$

Bemerkung: $a_n = (-1)^n \,\widehat{=}\,$ ist eine alternierende Folge (abwechselnde Vorzeichen in der Folge).

Aufgabe:

1. Berechne die ersten fünf Glieder der Folge gegeben durch $a_n = \frac{n}{n^2-2}$ und stelle die Glieder in aufzählender Form dar.

1.1 Reihen

Werden jedoch die Glieder einer Folge aufsummiert erhält man die Partialsumme s_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Definiert ist s_n durch...

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Daraus folgt die Partialsummenfolge oder auch **Reihe**:

$$(s_n) = \{s_1; s_2; s_3; \dots; s_n\}$$

Lösung

1. $(a_n) = \{-1; 1; \frac{3}{7}; \frac{2}{7}; \frac{5}{23}; \dots\}$

2 Summationszeichen

$$\sum_{x=1}^{n} a_x = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Laufvariable / Laufindex, Startwert, Endwert, Funktion bzgl. der Laufvariable
Lies: „Summe über alle a_x von $x = 1$ bis n“

Aufgabe:

2. $\sum_{k=1}^{5} k^2 =$

3. $\sum_{i=0}^{5} (2i+1) =$

4. $3^3 + 4^3 + 5^5 + \cdots + 12^3 = \sum_{x=n_2}^{n_1} x^3 \Rightarrow \; n_1 =? \quad n_2 =?$

5. $25 + 30 + 35 + 40 + \ldots + 105 = \sum_{x=n_2}^{n_1} n_0 \Rightarrow \; n_0 =? \quad n_1 =? \quad n_2 =?$

6. Bestimme die Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Folge mit dem allgemeinen Glied $a_k = ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

Lösung

2. 55
3. 36
4. $n_1 = 12; n_2 = 3$
5. $n_0 = 5x; n_1 = 21; n_2 = 5$
6. $ln(n+1)$

3 Die explizite und rekursive Darstellung

Eine Folge kann gegeben sein durch Anfangsglied(er) und der Angabe, wie das n-te Glied aus mindestens einem der vorangegangenen Glieder zu bilden ist. Die Folge ist dann **rekursiv** definiert (d.h. mit Startwert und einer Vererbungsformel).

$$a_{n+1} = 3a_n - 3 \qquad \text{mit } a_1 = 3$$

Aufgabe:

7. $a_{n+1} = 5 \cdot a_n$ mit $a_1 = 1$ und bilde (a_n)
8. $a_{n+1} = n - a_n$ mit $a_1 = 0$ und bilde (a_n)
9. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1;\ a_2 = 1$ und bilde (a_n)

Eine Folge kann auch durch Angabe ihres allgemeinen Gliedes gegeben sein. Die Folge ist dann **explizit** definiert (d.h. mit „direkter“ Formel ohne Vorgängerglied oder Startwert).

$$a_n = 4n - 3$$

Aufgaben:

10. $a_n \ = (-1)^n \cdot (n^2 + 1)$ und bilde (a_n)

Lösung

7. $(a_n) = \{1; 5; 25; 125; 625; \ldots\}$
8. $(a_n) = \{0; 1; 1; 2; 2; \ldots\}$
9. $(a_n) = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; \ldots\}$ (Fibonaccifolge)
10. $(a_n) = \{-2; 5; -10; 17; -26; \ldots\}$ (alternierende Folge)

3.1 Gemischte Aufgaben

11. Suche die explizite Darstellung a_n der gegebenen Folge
    a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ b) $2, 4, 8, 16, \ldots$
    c) $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$ d) $3, 9, 27, 81, \ldots$

12. Suche die explizite Darstellung a_n der gegebenen Folge
    a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
    c) $-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{9}, -\frac{32}{11}, \ldots$ d) $\frac{4}{7}, \frac{12}{15}, \frac{20}{23}, \frac{28}{31}, \ldots$

13. Suche die explizite Darstellung a_n der gegebenen Folge und die Glieder a_{50} und a_{51}.
    a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{9}{20}, \ldots$ b) $\frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{13}, \frac{7}{16}, \frac{8}{19}, \ldots$

14. Suche die rekursive Darstellung a_n der gegebenen Folge.
    a) $6, 13, 27, 55, 111, \ldots$ b) $4, 11, 32, 95, 284, \ldots$

15. Suche die rekursive Darstellung a_n der gegebenen expliziten Darstellung einer Folge.
    a) $a_n = 2n + 34$ b) $a_n = 1 - 2n$
    c) $a_n = (-3)^n$ d) $a_n = n^2$

16. Berechne die ersten sechs Glieder der zur gegebenen Folge gehörigen Partialsummenfolge (s_n). Wie gross ist s_{100}?
    a) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$ b) $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \ldots$

Lösung

11. a) $a_n = 2n$ b) $a_n = n^2$
    c) $a_n = 7n + 1$ d) $a_n = 3^n$

12. a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{n}{n+1}$
    c) $a_n = \frac{(-2)^n}{2n+1}$ d) $a_n = \frac{8n-4}{8n-1}$

13. a) $a_{50} = \frac{99}{200}$; $a_{51} = \frac{101}{204}$ b) $a_{50} = \frac{52}{151}$; $a_{51} = \frac{53}{154}$

14. a) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ mit $a_1 = 6$ b) $a_{n+1} = 3a_n - 1$ mit $a_1 = 4$

15. a) $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 36$ b) $a_{n+1} = a_n - 2$ mit $a_1 = -1$
    c) $a_{n+1} = -3a_n$ mit $a_1 = -3$ d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ / $(\sqrt{a_n} + 1)^2$ mit $a_1 = 1$

16. a) $(s_n) = \{1; 4; 9; 16; 25; 36\}$ mit $s_{100} = 10'000$ b) $(s_n) = \{1; -1; 2; -2; 3; -3\}$ mit $s_{100} = -50$

4 Die arithmetische und geometrische Folge

Eine **arithmetische** Folge (AF) ist eine Folge, bei der je zwei aufeinanderfolgende Glieder die gleiche Differenz d besitzen: $a_n - a_{n-1} = d$

Eine **geometrische** Folge (GF) ist eine Folge, bei der je zwei aufeinanderfolgende Glieder den gleichen Quotienten q besitzen: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Daraus folgen die allgemeinen Formen:

	explizit	**rekursiv**	s_n
AF	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_1; a_{n+1} = a_n + d$	$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
GF	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_1; a_{n+1} = a_n \cdot q$	$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

Tabelle 1: Formelübersicht: AF / GF

4.1 Gemischte Aufgaben

Aufgabe:

17. Überprüfe, ob es sich bei der Folge um eine AF handelt oder nicht. Falls ja, gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.
    a) $1, 4, 5, 10, 13, \dots$
    b) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
    c) $-2, 3, 8, 13, 18, 25, \dots$
    d) $12, 20, 28, 36, \dots$
    e) $17, 14, 11, 9, 6, 3, 0, \dots$
    f) $50, 40, 30, 20, 10, 0, -10, -20, \dots$

18. Berechne das 5. Glied der gegebenen AF.
    a) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = a_n + 8$
    b) $3, 7, 11, 15, \dots$
    c) $a_n = 5 + (n-1) \cdot 7$
    d) $a_1 = 34,\ d = 5$

19. Bestimme m so, dass die Folge $m,\ m^2 + 3,\ 4m^2 - 2m, \dots$ eine AF bildet.

20. Überprüfe, ob es sich bei der gegebenen Folge um eine geometrische Folge handelt oder nicht. Falls ja, gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.
    a) $1, 4, 16, 64, 256, \dots$
    b) $2, 3, 4.5, 6.75, 9, 13.5, \dots$
    c) $2, 6, 18, 54, \dots$
    d) $-2, 6, -18, 54, -189, \dots$
    e) $12, 6, 3, 1.5, \dots$
    f) $10, -20, 40, -80, 160, \dots$

21. Berechne mit der Summenformel.
    a) $32 + 48 + 72 + 108 + 162 + 243$
    b) $2 - 6 + 18 - 54 + 162 - 486 + 1458 - 4374$
    c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4096}{3}$
    d) $\frac{5}{4} + \frac{5}{2} + 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640$

Lösung

17. a) $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 1$ / $a_n = 3n - 2$
    b) $a_{n+1} = a_n + 1$ mit $a_1 = 1$ / $a_n = n$
    c) kein AF
    d) $a_{n+1} = a_n + 8$ mit $a_1 = 12$ / $a_n = 8n + 4$
    e) kein AF
    f) $a_{n+1} = a_n - 10$ mit $a_1 = 50$ / $a_n = 60 - 10n$

18. a) $a_5 = 38$
    b) $a_5 = 19$
    c) $a_5 = 33$
    d) $a_5 = 54$

19. $m_1 = -\frac{3}{2}$ und $m_2 = 2$

20. a) $a_{n+1} = 4a_{n-1}$ mit $a_1 = 1$ / $a_n = 4^{n-1}$
    b) kein GF
    c) $a_{n+1} = 3a_{n-1}$ mit $a_1 = 2$ / $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
    d) kein GF
    e) $a_{n+1} = 0.5a_{n-1}$ mit $a_1 = 12$ / $a_n = 12 \cdot 0.5^{n-1}$
    f) $a_{n+1} = -2a_{n-1}$ mit $a_1 = 10$ / $a_n = 10 \cdot (-2)^{n-1}$

21. a) 665
    b) -3280
    c) 2730
    d) $\frac{5115}{4}$

5 Die unendlich geometrische Reihe

Für $|q| < 1$ streben die Glieder $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ einer GF gegen 0. Die GF stellt eine sogenannte **Nullfolge** dar und es gilt: $a_n \to 0$ für $k \to \infty$. Die dazugehörige Reihe (s_n) strebt für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert s:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \to \qquad s = \frac{a_1}{1-q} \qquad\qquad \text{für } n \to \infty$$

Eine Folge, die einen Grenzwert hat, heisst **konvergent**. Andernfalls heisst sie **divergent**. Eine konvergente Reihe kann auch mit dem Summenzeichen geschrieben werden:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \ + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

Aufgabe:

22. Berechne.
    a) $6 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots$
    b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ \frac{1}{8} \pm \ldots$
    c) $200 + 120 + 72 + \ldots$
    d) $2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \ldots$

23. Von einer geometrischen Reihe sind $a_5 \ = 0.0972$ und $q = 0.3$ bekannt. Berechne den Grenzwert s der unendlichen GR.

24. Von der GF (a_n) mit dem Quotienten q sind zwei Glieder gegeben. Berechne q und den Grenzwert s der dazugehörige unendlichen GR.
    a) $a_5 = 1296;\ a_8 = \frac{2187}{4}$
    b) $a_3 = \frac{80}{3};\ a_6 = -\frac{640}{81}$

25. Bestimme der Quotienten q einer unendlichen GR, wenn über deren Grenzwert s folgendes bekannt ist:
    a) Der Grenzwert s ist 6-mal so gross wie das erste Glied der GR.
    b) Der Grenzwert s ist 4.5-mal so gross wie das zweite Glied der GR.

26. Bestimme die drei anschliessenden Glieder der GF $4 \cdot \sqrt{2} - 4,\ 2 \cdot \sqrt{2} - 4,\ \ldots$ und berechne, sofern vorhanden, den Grenzwert s der dazugehörigen GR.

Lösung

22. a) 9
    b) $\frac{2}{3}$
    c) 500
    d) $3 + 3\sqrt{3}$
23. 17.14
24. a) $q = \frac{3}{4};\ s = 16'384$
    b) $q = -\frac{2}{3};\ s = 36$
25. a) $q = \frac{5}{6}$
    b) $q_1 = \frac{1}{3};\ q_2 = \frac{2}{3}$
26. $a_3 \ = -2 + 2\sqrt{2};\ a_4 = -2 \ + \sqrt{2};\ a_5 = -1 + \sqrt{2};\ s = -16 + 12\sqrt{2}$