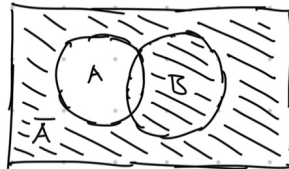


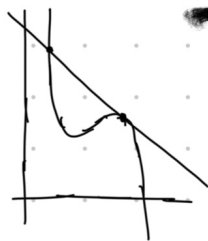
Formelsammlung

Mathematik



$$\sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b \Leftrightarrow \sqrt[b]{c} = a$$



π

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

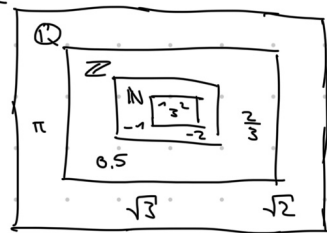
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i c_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

\mathbb{R}



Rosshan Ravinthrara

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4
1.1 Nomenklatur in der Mathematik	4
1.2 Symbole in der Mathematik	5
1.3 Griechisches Alphabet	5
2 Algebra	6
2.1 Terme	6
2.1.1 Polynome	6
2.1.2 Brüche	6
2.1.3 Quadratwurzeln	6
2.1.4 Potenzen	6
2.1.5 Wurzeln	7
2.1.6 Logarithmus	7
2.2 Gleichungen	7
2.2.1 Lineare Gleichungen	7
2.2.2 Bruchgleichungen	7
2.2.3 Wurzelgleichungen	8
2.2.4 Quadratische Gleichungen	8
2.2.5 Potenzgleichungen	8
2.2.6 Exponentialgleichungen	8
2.2.7 Logarithmusgleichungen	9
2.2.8 Gleichungssysteme	9
3 Analysis	10
3.1 Folgen und Reihen	10
3.1.1 Begriffe der Folgen und Reihen	10
3.1.2 Arithmetische Folgen 1. Ordnung	10
3.1.3 Geometrische Folgen	10
3.1.4 Unendlich Geometrische Reihen	10
3.1.5 Grenzwerte	10
3.2 Funktionen	11
3.2.1 Lineare Funktionen	11
3.2.2 Quadratische Funktionen	11
3.2.3 Potenzfunktionen	12
3.2.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen	12
3.3 Differentialrechnung	12
3.3.1 Bedeutung der 1. Ableitung	12
3.3.2 Kurvendiskussion	14
3.3.3 Extremalaufgaben	17
3.4 Integralrechnung	18
3.4.1 Begriff des Integrals	18
3.4.2 Flächenberechnung	19
3.4.3 Volumenberechnung	19
3.4.4 Uneigentliche Integrale	19
3.4.5 Integrationsmethoden	20
3.5 Differentialgleichungen	20
3.5.1 Richtungsfelder	20
4 Stochastik	21
4.1 Kombinatorik	21
4.1.1 Begriffe der Kombinatorik	21
4.1.2 Multiplikationsprinzip	21

4.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	21
4.2.1	n -stufige Zufallsversuche bei $n \in \mathbb{N}$	21
4.2.2	Zufallsvariable	22
4.2.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	23
5	Geometrie	24
5.1	Trigonometrie	24
5.1.1	Winkelfunktionen	24
5.1.2	Rechtwinkliges Dreieck	25
5.1.3	Allgemeines Dreieck	25
5.1.4	Goniometrische Gleichungen	25
5.2	Vektorrechnung	26
5.2.1	Elementare Operationen	26
5.2.2	Kollinearität / Komplanarität / Lineare Abhängigkeit	26
5.2.3	Ortsvektor	27
5.2.4	Skalarprodukt	27
5.2.5	Vektorprodukt	27
5.3	Analytische Geometrie	28
5.3.1	Geradengleichung	28
5.3.2	Ebenengleichung	28
5.3.3	Kugelgleichung	29
5.3.4	Schnittprobleme	30
5.3.5	Abstandsprobleme	32

1 Grundlagen

1.1 Nomenklatur in der Mathematik

$$x + y = z$$

Addition
Summand
Summand
Summe

$$x - y = z$$

Subtraktion
Minuend
Subtrahend
Differenz

$$x \cdot y = z$$

Multiplikation
Faktor
Faktor
Produkt

$$x : y = z$$

Division
Dividend
Divisor
Quotient

$$a_i^n = x$$

Potenz
Basis
Exponent
Index
Potenzwert

$$\sqrt[n]{a} = x$$

Wurzel
Wurzelexponent
Radikant
Wurzelwert

$$\log_a(b) = x$$

Logarithmus
Logarithmusbasis
Numerus
Logarithmuswert

$$f(x) = y$$

Funktion
Name der Funktion
Variable / Stelle / Argument
Funktionswert

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

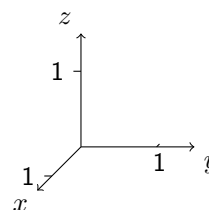
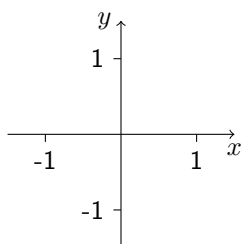
Stammfunktion
Integralzeichen
Integrand
Differential
Stammfunktion
Integrationskonstante

$$\binom{n}{k} \text{ im TR: } \begin{array}{l} n \text{ nCr } k \\ \text{oder} \\ n \text{ nPr } k \end{array}$$

Binomialkoeffizient
Anzahl Elemente
Ausgewählte Elemente (bzw. k mal ziehen)

Kartesisches Koordinatensystem

- 2 bzw. 3 Achsen
- Orientierung
- Beschriftung
- (min.) eine Einheit



Zum Beispiel:

Abbildung 1:
Koordinatensystem

2D-

Abbildung 2:
Koordinatensystem

3D-

1.2 Symbole in der Mathematik

=	gleich	≠	ungleich
⇒	daraus folgt (Implikation)	⇔	genau dann, wenn (Äquivalenz)
⊥	senkrecht, orthogonal, normal	∥	parallel
∝	proportional	≡	identisch, kongruent
≈	ungefähr	~	ähnlich
∈	Element von	∉	kein Element von
⊂	Teilmenge von	⊄	keine Teilmenge von
∧	und	∨	oder
≐	entspricht	:=	definiert

Tabelle 1: Symbole in der Mathematik

1.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	a	N	ν	Nü	n
B	β	Beta	b	Ξ	ξ	Xi	x
Γ	γ	Gamma	g	Ο	ο	Omikron	o (kurz)
Δ	δ	Delta	d	Π	π	Pi	p
E	ε	Epsilon	e (zu)	Ρ	ρ	Rho	r
Z	ζ	Zeta	z	Σ	σ	Sigma	s
H	η	Eta	e (offen)	Τ	τ	Tau	t
Θ	θ	Theta	th	Υ	υ	Ypsilon	y
I	ι	Iota	i	Φ	φ	Phi	ph (f)
K	κ	Kappa	k	Χ	χ	Chi	ch
Λ	λ	Lambda	l	Ψ	ψ	Psi	ps
M	μ	Mü	m	Ω	ω	Omega	o (lang)

Tabelle 2: Griechisches Alphabet

2 Algebra

2.1 Terme

2.1.1 Polynome

Rechengesetze

Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \end{aligned} \quad (1)$$

Binomische Formel

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2.1.2 Brüche

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} &= \frac{a \pm b}{c} \\ \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} &= \frac{ab}{cd} \\ \frac{a}{c} : \frac{b}{d} &= \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{cb} \end{aligned} \quad (2)$$

2.1.3 Quadratwurzeln

$$x = \sqrt{a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = a \wedge x = \pm\sqrt{a} \wedge a \geq 0\} \quad (3)$$

Betrag

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

2.1.4 Potenzen

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a^n)^m &= a^{nm} \\ a^n b^n &= (ab)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^0 &= 1, a \neq 0 \\ a a^n &= a^{n+1} \\ 1^n &= 1 \\ 0^n &= 0, n > 0 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}} \\ a^n = a^m &\Rightarrow n = m \end{aligned} \quad (6)$$

2.1.5 Wurzeln

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[kn]{a^{km}} & \sqrt[n]{0} &= 0 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a} & \sqrt{a} &= \sqrt[2]{a} \\
 \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} & \sqrt[3]{a} &= \sqrt[3]{a} \\
 \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \sqrt[n]{a^n} &= |a|, a \in \mathbb{R}, n \text{ gerade} \\
 & & \sqrt[n]{a^{-m}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

2.1.6 Logarithmus

$$a^b = c \iff \log_a(c) = b \iff \sqrt[b]{c} = a \tag{9}$$

Zehnerlogarithmus	$a = 10$	$\log(b) = \lg(b) = \log_{10}(b)$
Logarithmus naturalis	$a = e \approx 2.72$	$\ln(b) = \log_e(b)$
Zweierlogarithmus	$a = 2$	$\lg(b) = \log_2(b)$

Logarithmusgesetze

1. Logarithmenregel $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{10}$

2. Logarithmenregel $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \tag{11}$

3. Logarithmenregel $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x) \tag{12}$

Spezialfälle

$$\begin{aligned}
 a^{\log_a(b)} &= \log_a(a^b) = b \\
 \log_a(a) &= 1 \\
 \log_a(1) &= 0 \\
 \log_a\left(\frac{1}{y}\right) &= \log_a(1) - \log_a(y) = -\log_a(y) \\
 \log_a(b) &= \frac{\log(b)}{\log(a)} \\
 \log_a(b) = \log_a(c) &\Rightarrow b = c
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

2.2 Gleichungen

Diskussion bei Gleichungen

Zahl $x \hat{=}$ Zahl $x \rightarrow$ unendlich Lösungen \rightarrow unerfüllbar

Zahl $x \hat{=}$ Zahl $y \rightarrow$ keine Lösungen \rightarrow allgemeingültig

2.2.1 Lineare Gleichungen

$$ax + b = 0 \tag{14}$$

Lineare Koeffizient, konstantes Glied

2.2.2 Bruchgleichungen

$$\frac{a}{x} + b = 0 \tag{15}$$

Lineare Koeffizient, konstantes Glied

2.2.3 Wurzelgleichungen

$$\sqrt{x} + b = 0 \tag{16}$$

Radikant, konstantes Glied

2.2.4 Quadratische Gleichungen

$$ax^n + bx + c = 0 \tag{17}$$

Quadratischer Koeffizient, linearer Koeffizient, konstantes Glied, $n = 2 \vee 4$

Lösungsverfahren bei $n = 2$ (quadratisch / Mitternachtsformel)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{18}$$

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$D \begin{cases} < 0 & \text{keine Lösung} \\ = 0 & \text{eine Lösung} \\ > 0 & \text{zwei Lösung} \end{cases} \tag{19}$$

Lösungsverfahren bei $n = 4$ (biquadratisch / Substitution)

$$x^4 + x^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=a} a^2 + a + c = 0 \Rightarrow \text{Lösungsverfahren bei } n = 2 \xrightarrow{x=\sqrt{a_{1,2}}} x_{1,2,3,4} \tag{20}$$

2.2.5 Potenzgleichungen

$$ax^n = 0 \tag{21}$$

Lösungsverfahren

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$x_1 = \sqrt[n]{a}; x_2 = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
$a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$a < 0$	keine Lösung	$x = -\sqrt[n]{ a }$

Tabelle 3: Lösungsverfahren bei Potenzgleichungen

2.2.6 Exponentialgleichungen

$$ab^{dx+f} + c = 0 \tag{22}$$

Exponentielle Koeffizient, konstantes Glied

Lösungsverfahren bei $b = b$ (Exponentenvergleich)

$$b^{cx+d} = b^{fx+g} \Rightarrow cx + d = fx + g \tag{23}$$

Lösungsverfahren bei exponentiellem Wachstum / Zerfall

$$A(t) = A(0) \cdot a^t \tag{24}$$

Startfaktor, Wachstums- / Zerfallsfaktor

2.2.7 Logarithmusgleichungen

$$\log_a(x) + c = 0 \quad (25)$$

Numerus, konstantes Glied

Lösungsverfahren bei $\log_a = \log_a$ (Numerusvergleich)

$$\log_a(bx + c) = \log_a(fx + g) \Rightarrow bx + c = fx + g \quad (26)$$

2.2.8 Gleichungssysteme

Allgemeine Form eines 2×2 -Gleichungssystems

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad ax + by = c \\ \text{II} \quad fx + gy = h \end{array} \quad (27)$$

Lösungsverfahren

- Substitutionsverfahren / Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren / GAUSS'sche Eliminationsverfahren

3 Analysis

3.1 Folgen und Reihen

3.1.1 Begriffe der Folgen und Reihen

Explizite Darstellung	$a_n = n$	
Rekursive Darstellung	$a_1 = x; a_{n+1} = a_n$	(28)
Partialsommenformel	$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$	

3.1.2 Arithmetische Folgen 1. Ordnung

Explizite Darstellung	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	
Rekursive Darstellung	$a_1; a_{n+1} = a_n + d$	(29)
Partialsommenformel	$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	

3.1.3 Geometrische Folgen

Explizite Darstellung	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	
Rekursive Darstellung	$a_1; a_{n+1} = a_n \cdot q$	(30)
Partialsommenformel	$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$	

3.1.4 Unendlich Geometrische Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_1 q + a_1^2 q^2 + \dots) = \frac{a_1}{1 - q}$$

3.1.5 Grenzwerte

$$a = \lim_{n \rightarrow x} a_n$$

Grenzwert, strebt gegen die Variable, Funktion

Definition: Eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert hat, nennt man *konvergent*, falls sie keinen Grenzwert hat, ist sie *divergent*.

Konvergente Folgen mit dem Grenzwert Null heissen *Nullfolgen*.

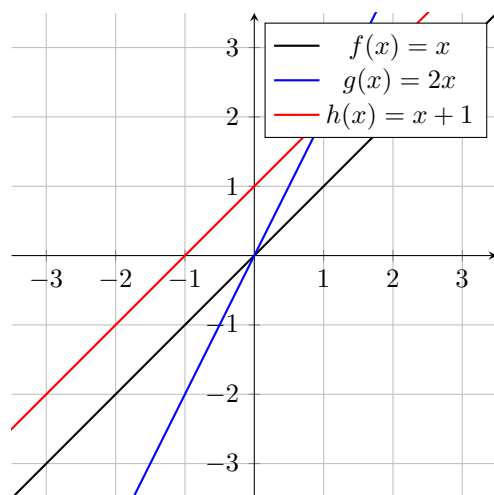
Rechenregeln für das Rechnen mit Grenzwerten:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

3.2 Funktionen

$$\begin{aligned} \text{Schnittstelle(n) } f(x) \text{ und } g(x) & \quad f(x) = g(x) \\ \text{Nullstelle(n) (Spezialfall)} & \quad f(x) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

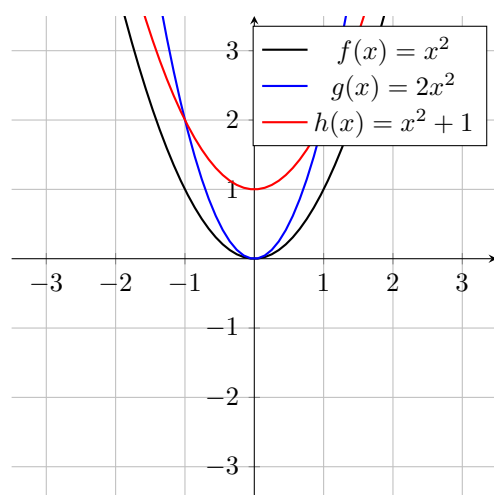
3.2.1 Lineare Funktionen



$$f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + q = y \tag{32}$$

Steigung m , y -Achsenabschnitt

3.2.2 Quadratische Funktionen



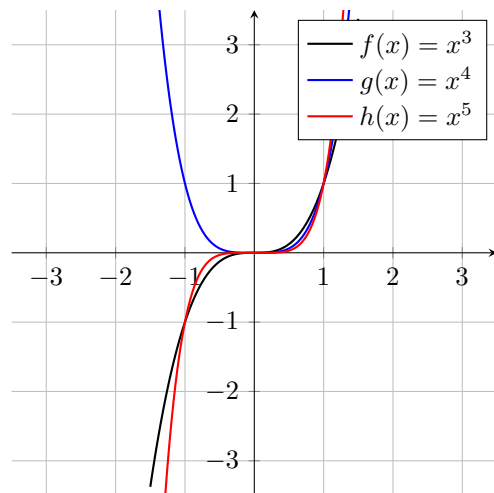
$$f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + q = y \tag{33}$$

Steigung m , y -Achsenabschnitt

$$\tilde{f}(x) = a(x - u)^2 + v = y \tag{34}$$

Name der Scheitelpunktform, Verschiebung in x -Richtung, Verschiebung in y -Richtung

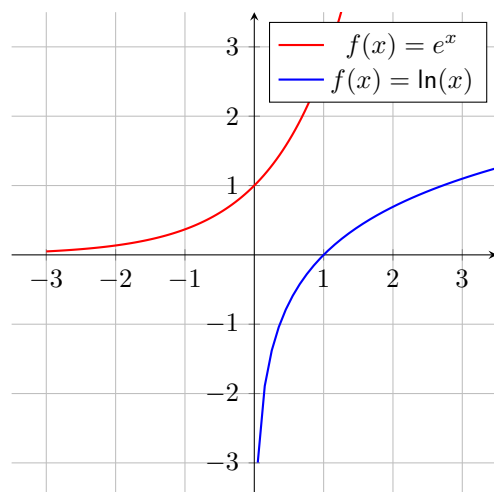
3.2.3 Potenzfunktionen



$$f(x) = ax^n = y \quad (35)$$

Variable im Exponent

3.2.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen



$$f(x) = c \cdot a^{nx} + d = y$$

Spiegelung an x -Achse, Steigung, Verschiebung in y -Richtung

Definitionsbereich

Exponentialfunktionen	$D = \mathbb{R}$	(36)
Logarithmusfunktionen	$D = [0, \infty[$	

Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \text{Aus } f(x) = e^x &\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x) \\ \text{Aus } f(x) = \ln(x) &\Rightarrow f^{-1}(x) = e^x \end{aligned} \quad (37)$$

3.3 Differentialrechnung

3.3.1 Bedeutung der 1. Ableitung

Mit der ersten Ableitung $f'(x)$ berechnet man die Steigung an einer Stelle des Graphs.

Ableitung elementarer Funktionen

Potenzfunktionen	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	
Exponentialfunktionen	$(n^x)' = n^x \cdot \ln n$	
Exponentialfunktionen mit $n = e$	$(e^x)' = e^x$	
Logarithmusfunktionen	$\log'_n x = \frac{1}{x \cdot \ln n}$	(38)
Logarithmusfunktionen mit $n = e$	$\ln' x = \frac{1}{x}$	
Trigonometrische Funktionen ($\sin x$)	$\sin' x = \cos x$	
Trigonometrische Funktionen ($\cos x$)	$\cos' x = -\sin x$	
Trigonometrische Funktionen ($\tan x$)	$\tan' x = 1 + \tan^2 x$	

Ableitungsregeln

Produktregel	$(fg)' = f'g + fg'$	
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	(39)
Quotientenregel mit $f = 1$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	
Kettenregel	$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$	

Tangenten, Normale, Schnittwinkel

Tangentengleichung	$t(x) = m_t x + q_t$	
Normalengleichung	$n(x) = -\frac{1}{m_t} x + q_n$	(40)
Schnittwinkel	$\phi = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$	

Graphisches Ableiten

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
Nullstelle	$= 0$	-	-
Einfache Nullstelle	$= 0$	$\neq 0$	-
Doppelte Nullstelle	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
Dreifache Nullstelle	$= 0$	$= 0$	$= 0$
Extremalstelle	-	$= 0$	$\neq 0$
Wendestelle	-	-	$= 0$
Terassenpunkt	-	$= 0$	$= 0$

Tabelle 4: Übersicht der Differentialzusammenhänge

3.3.2 Kurvendiskussion

Definitionsmenge (bei gebrochen-rationalen, Wurzel- und Logarithmusfunktionen)

$$\mathbb{D} =] - \infty; x_1] \cup [x_2; \infty[\mid \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \tag{41}$$

Nenner $\neq 0$ | Radikant ≥ 0 | Numerus > 0

Nullstellen

$f(x) = 0$, bei kubischen Gleichungen oder Gleichungen höheren Grades wird das Horner-Schema verwendet:

Ausgangslage:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

a_3	a_2	a_1	a_0
$x_1 = x$	\downarrow	$a_3 \cdot x \downarrow$	$(a_2 + a_3x) \cdot x \downarrow$
a_3	$a_2 + a_3x$	$a_1 + a_2x + a_3x^2$	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_2}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_1}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b_0}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(x)=0}$

Tabelle 5: Vorgehen beim Horner-Schema

Endergebnis:

$$f(x) = (x - x_0)(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

Polstellen (bei gebrochen-rationalen Funktionen)

$f(x) = 0 \hat{=}$ vertikale Asymptoten

Graph an der Polstelle...

- ... verreisst: mvzw
- ... verreisst nicht: ovzw

Vorzeichenwechsel $\hat{=}$ von links / rechts die Polstelle annähern und beide Vorzeichen vergleichen

Verhalten im $\pm\infty$

Gradunterschiede $\hat{=}$ Art der Asymptote: Gerade / Parabel / ...

(bei gebrochen-rationalen Funktionen)
 Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom
 Asymptote $\hat{=}$ x -Achse / horizontale Asymptote

(bei Wurzelfunktionen)
 Quadratische Variable mit Quadratwurzel $\hat{=}$
 schräge Asymptote

Grad Zählerpolynom = Grad Nennerpolynom
 Koeffizienten der Variable des höchsten Grades

Grenzwert unbestimmt $\hat{=}$ Regel von L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \tag{42}$$

Ansonsten:
 Polynomdivision

Ansonsten:
 Erraten

Polynomdivision - Ausgangslage:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \Rightarrow (ax^2 + bx + c) : (dx + e)$$

$$\begin{array}{r}
 (ax^2 + bx + c) \qquad \qquad \qquad : (dx + e) \\
 \hline
 - (ax^2 + e(ax^2 : dx)) \qquad \qquad \downarrow \\
 \hline
 bx - e(ax^2 : dx) \nearrow + c \\
 \hline
 -(bx - e(ax^2 : dx) + e((bx - e(ax^2 : dx)) : dx)) \swarrow \\
 \hline
 c - e((bx - e(ax^2 : dx)) : dx) \nearrow
 \end{array}$$

Tabelle 6: Vorgehen bei der Polynomdivision

$$= \underbrace{(ax^2 : dx)}_{b_1} + \underbrace{(bx - e(ax^2 : dx)) : dx}_{b_0} + \underbrace{\frac{c - e((bx - e(ax^2 : dx)) : dx)}{dx + e}}_{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0}$$

Endergebnis: Somit ist die Asymptote $a(x)$ (nach Grenzübergang von $f(x)$)...

$$a(x) = b_1 + b_0$$

Weiteres Vorgehen:

1. Bei $x^n \mid n \geq 3$ genau gleichen Vorgang folgen.
2. Bei $x^n \mid n \geq 2$ muss jeder Grad in absteigender Grösse repräsentiert werden ergo $0x^n$.
3. Gradunterschiede $\hat{=}$ Art der Asymptote (Gerade / Parabel / ...).

(bei Exponentialfunktionen)

x gegen $\pm\infty$ streben lassen und Asymptote $a(x)$ bzw. Graph zeichnen $\pm\infty$

Extremalstellen

$$f'(x) = 0 \begin{cases} \text{Tiefpunkt: } f''(x) > 0 \\ \text{Wendepunkt: } f''(x) = 0 \\ \text{Hochpunkt: } f''(x) < 0 \end{cases} \quad (43)$$

Terassenstellen

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \quad (44)$$

Form des Graphen

1. in passendes Koordinatensystem Berechnetes richtig eintragen
2. Gezeichnetes richtig (nach eigenen Angaben) interpretieren
3. zur Not auf Form der Grundfunktionen basieren

Bestimmen der Funktionsgleichung aus GrapheneigenschaftenGrundregel: Anzahl Bedingung \geq Anzahl Variablen \Rightarrow Gleichungssystem

Basics	
Geht durch Punkt $(x; y)$	$f(x) = y$
Geht durch den Ursprung	$f(0) = 0$
Berührt die x-Achse	$f(x) = 0 \mid f'(x) = 0$
Schneidet die x-Achse	$f(x) = 0$
Schneidet die y-Achse	$f(0) = y$
Punkte / Stellen	
Extremalstelle an der Stelle x	$f'(x) = 0$
Geht durch Extremalstelle $(x; y)$	$f(x) = y \mid f'(x) = 0$
Wendepunkt an der Stelle x	$f''(x) = 0$
Geht durch Wendepunkt $(x; y)$	$f(x) = y \mid f''(x) = 0$
Terassenpunkt an der Stelle x	$f'(x) = 0 \mid f''(x) = 0$
Geht durch Terassenpunkt $(x; y)$	$f(x) = y \mid f'(x) = 0 \mid f''(x) = 0$
Symmetrie	
Graph hat Ursprungssymmetrie	Term mit Variablen gerader Ordnung streichen
Graph hat y-Achsensymmetrie	Term mit Variablen ungerader Ordnung streichen
Tangente / Normale / Gerade	
Tangente an der Stelle x mit Gleichung $t(x)$	$f(x) = t(x) \mid f'(x) = t'(x)$
Tangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = m$
Waagrechte Tangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = 0$
Wendetangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = m \mid f''(x) = 0$
Normale an Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = -\frac{1}{m_n}$
Tangente an der Stelle x , die an Gerade $g(x)$ parallel ist	$f'(x) = g'(x)$

Tabelle 7: Wörterbuch für die Funktionsdetektion

3.3.3 Extremalaufgaben

Anleitung

1. Ansatz erstellen (Werte u. Grössen, die fürs Lösen der Aufgabe relevant sind)
2. Skizze anfertigen (am besten zweidimensional)
3. Hauptbedingungen (als Funktion) formulieren
4. Nebenbedingung formulieren
5. Zielfunktionen zusammenstellen
6. Randwerte überprüfen (bei Intervallen)
7. Sinnhaftigkeit logisch kontrollieren + gefragte Lösung geben

Stereometrie

Dreieck

$$A = \frac{1}{2}ah$$

Quadrat

$$d = \sqrt{2}a$$

$$A = a^2$$

Rechteck

$$d_{1,2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$A = ab$$

Kreis

$$u = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2$$

Würfel

$$d = \sqrt{3}a$$

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$

Quader

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

Spat

$$V = G \cdot h$$

Gerader Kreiszylinder

$$M = 2\pi rh$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

Tetraeder

$$V = \frac{1}{3}Gh$$

Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$M = 4\pi r^2$$

A: Fläche
S: Oberfläche
M: Mantelfläche
G: Grundfläche
V: Volumen

abc: Seitenlänge
d: Diagonale
u: Umfang
h: Höhe
r: Radius

Ähnlichkeit

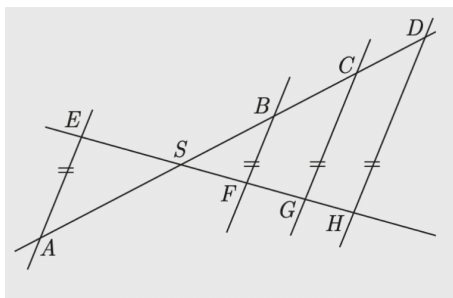


Abbildung 3: Strahlensätze

1. Strahlensatz

$$a \parallel b \Leftrightarrow \overline{SB} : \overline{SC} = \overline{SF} : \overline{SG} \quad (45)$$

2. Strahlensatz

$$a \parallel b \Leftrightarrow \overline{SB} : \overline{SC} = \overline{BF} : \overline{CG} \quad (46)$$

3.4 Integralrechnung

3.4.1 Begriff des Integrals

Stammfunktion aller Elementarfunktionen

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$c, c \in \mathbb{R}$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\ln \cos x $
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1) = x(\log_a x - \log_a(e))$

Tabelle 8: Stammfunktion aller Elementarfunktionen

Unbestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion von f , so heisst die Menge aller Stammfunktionen das unbestimmte Integral von f :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (47)$$

\int heisst „Integralzeichen“, $f(x)$ ist der „Integrand“, dx das „Differential“ und C heisst „Integrationskonstante“.

Bestimmtes Integral

$$\text{Wenn } F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'_a(x) = f(x) \quad (48)$$

$$\text{Wenn } F \hat{=} \text{ eine beliebige Stammfunktion} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Weitere Regeln:

Integrationsgrenzen	$\int_a^b f(x)dx, a \leq x \leq b$	
Vertauschen der Integrationsgrenzen	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	(49)
Aufteilen der Integrationsgrenzen	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	
Sonderfall	$\int_a^a f(x)dx = 0$	

3.4.2 Flächenberechnung

Flächen zwischen einer Kurve und der x -Achse:

$$A = \left| \int_a^{x_S} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_S}^b f(x)dx \right| \tag{50}$$

$x_S \hat{=}$ die einzige Nullstelle von f in $]a; b[$

Flächen zwischen zwei Kurven:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))dx \right| \tag{51}$$

$x_{1,2,3} \hat{=}$ Schnittstellen der beiden Graphen

3.4.3 Volumenberechnung

Rotation um die x -Achse:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \tag{52}$$

Ringförmige Rotationskörper (um die x -Achse):

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx \tag{53}$$

Bedingung: $f(x) > g(x)$

3.4.4 Uneigentliche Integrale

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \\ \int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^b f(x)dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \end{aligned} \tag{54}$$

Wenn der Grenzwert der Fläche einen endlichen Wert hat (bspw. 2), ist die Fläche „konvergent“ und wenn der Grenzwert $\pm\infty$ ist, ist die Fläche „divergent“.

3.4.5 Integrationsmethoden

Faktorregel	$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$	
Summenregel	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	
Einfache Substitution	$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b)$	(55)
Mehrfache Substitution	$\int f(g(x))g'(x)dx \stackrel{g'(x)dx=du}{=} \int f(u)du = F(g(x))$	

3.5 Differentialgleichungen

Der Einfachheit halber basiert dieses Kapitel auf die Funktionsgleichung $y'(x) = xy$ und dem Punkt $P(0, 0)$ bzw. $y(0) = 1$.

Lösung einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^C = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot C$$

$$y(0) = 1 \cdot C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \hat{=} \text{eindeutige Lösung für } y(0) = 1$$

3.5.1 Richtungsfelder

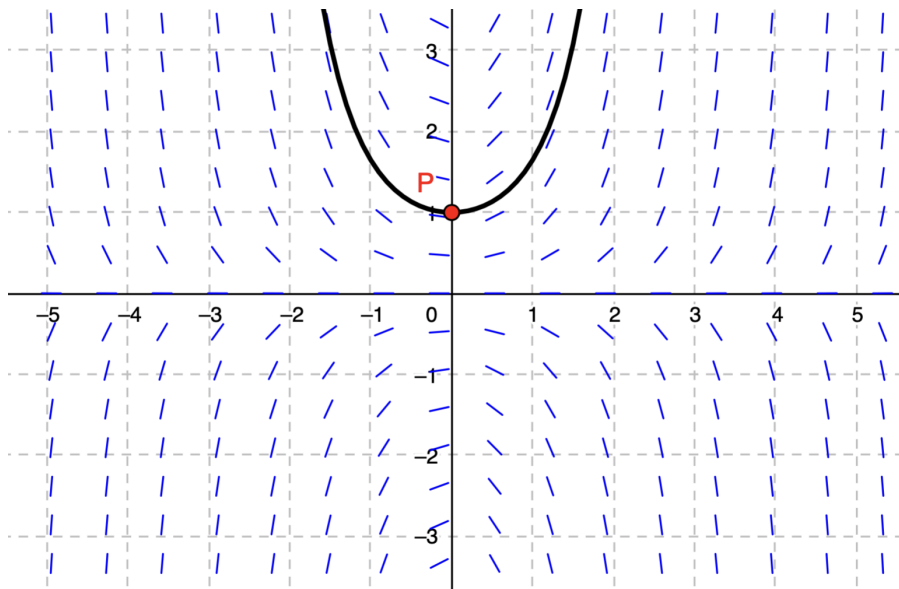


Abbildung 4: Richtungsfeld für $y' = xy$ und Kurve durch $y(0) = 1$

4 Stochastik

4.1 Kombinatorik

4.1.1 Begriffe der Kombinatorik

Binomialkoeffizient

Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird als „n tief k“ gelesen und heisst Binomialkoeffizient. n steht für die Grösse der Menge, aus der gewählt wird und k steht für die Anzahl der Auswahlen / Ziehungen / Plätze.

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt Antwort auf zwei unterschiedliche Fragen:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen k auszuwählen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen $n - k$ Elemente *nicht auszuwählen*?

Fakultät

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Ausnahme $\Rightarrow 1! = 1$ und $0! = 1$ (57)

$n!$ gelesen „n-Fakultät“

4.1.2 Multiplikationsprinzip

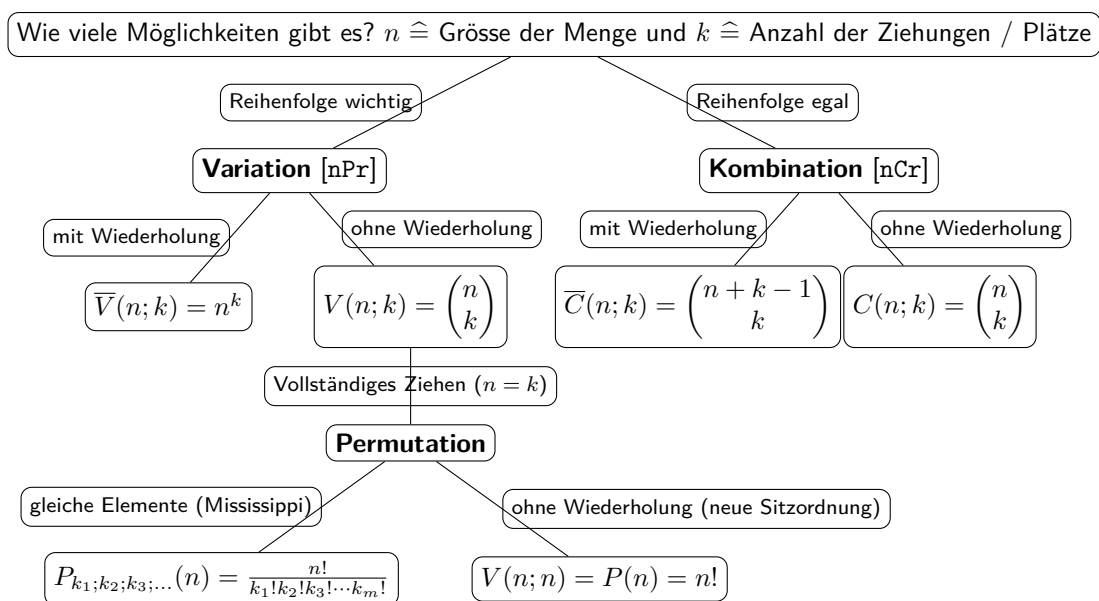


Abbildung 5: Entscheidungsbaum: Kombinatorik

4.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.2.1 n-stufige Zufallsversuche bei $n \in \mathbb{N}$

Baumdiagramm und deren Pfadregeln

1. Pfadregel Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Elementarereignis eintritt, werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des entsprechenden Pfades miteinander multipliziert.
2. Pfadregel Gehören zu einem Ergebnis mehrere Pfade, so werden die dazugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten addiert.

Begriffe der n -stufigen Zufallsversuche

Ergebnisraum S : Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch enthält der Ergebnisraum S alle möglichen Kombinationen der Einzelergebnisse.

Elementarereignis E : Ein Elementarereignis besteht aus genau *einem* möglichen Ergebnis des mehrstufigen Zufallsversuchs.

Ereignis E : Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraums:

$$E \subseteq S \tag{58}$$

Gegeneignis \bar{E} : Das Gegeneignis enthält alle Ergebnisse, die nicht zum Ereignis E gehören.

$$\bar{E} = S \setminus E \tag{59}$$

Es gilt stets:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \tag{60}$$

4.2.2 Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsverteilung (bei Zufallsvariablen)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X zeigt, wie die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf die möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_n von X verteilt ist. Das basiert formal auf Folgendem:

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1 \tag{61}$$

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung zählt, wie oft ein Ereignis in gleichartigen, unabhängigen Versuchen auftritt. Mit der folgenden Formel kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \tag{62}$$

Wahrscheinlichkeit bei ungenauer Anzahl Erfolgen:

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
Höchste x Erfolge	$P(X \leq x) = \sum_{x=0}^x \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Weniger als x Erfolge	$P(X < x) = \sum_{x=0}^{x-1} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Mindestens k Erfolge	$P(X \geq k) = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Mehr als k Erfolge	$P(X > k) = \sum_{x=k+1}^n \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Mindestens x_L und höchstens x_R Erfolge	$P(x_L \leq X \leq x_R) = \sum_{x=x_L}^{x_R} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$

Tabelle 9: Wahrscheinlichkeit bei ungenauer Anzahl Erfolgen

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X ist der durchschnittliche Wert, den X langfristig annimmt, wenn man den Zufallsversuch sehr oft wiederholt.

Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable X ist definiert als

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_{n-1}p_{n-1} + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_kp_k \quad (63)$$

Dabei entsprechen $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ den Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Zufallsvariable X ihre möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} und x_n annimmt.

Erwartungswert der Binomialverteilung:

Eine binomial(n, p)-verteilte Zufallsgrösse X hat den Erwartungswert $E(X) = np$.

„fairen“ Spiele

Ein faires Spiel ist ein Zufallsspiel, bei dem der langfristige durchschnittliche Gewinn oder Verlust null beträgt, also weder die eine noch die andere Partei einen Vorteil hat.

$$E(X) \begin{cases} > 0, & \text{Spiel zugunsten des Hauses} \\ = 0, & \text{fairen Spiel} \\ < 0, & \text{Spiel zugunsten des Spielers} \end{cases} \quad (64)$$

4.2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wird als $P(A|B)$ notiert. Sie ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn bekannt ist, dass B eingetreten ist.

Satz von Bayes

$$\begin{aligned} \text{zweistufig} \quad P(B|A) &= \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})} \\ \text{allgemein} \quad P(B_j|A) &= \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \end{aligned} \quad (65)$$

Abhängige und unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ heissen unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses das Eintreten des anderen nicht beeinflusst. Das bedeutet formal, dass eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $P(A|B) = P(A) \hat{=}$ Die Wahrscheinlichkeit von A ändert sich nicht, wenn B eintritt.
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \hat{=}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, ist das Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten.
3. $P(B|A) = P(B) \hat{=}$ Die Wahrscheinlichkeit von B bleibt gleich, unabhängig davon, ob A eintritt (symmetrisch).
4. $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, falls $P(B) < 1 \hat{=}$ Tritt gleich wahrscheinlich ein, egal ob B eintritt oder nicht.

Abhängigkeit bedeutet, dass das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des anderen verändert: $P(A|B) \neq P(A)$ oder $P(B|A) \neq P(B)$.

5 Geometrie

5.1 Trigonometrie

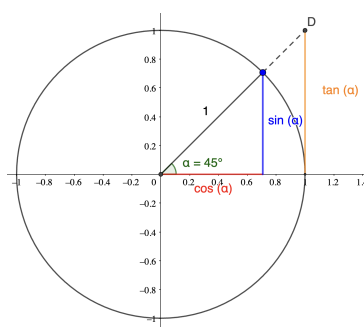
5.1.1 Winkelfunktionen

Definition

Grad: Ein Grad ($^\circ$) entspricht $\frac{1}{360}$ eines Vollwinkels. $\pi \Rightarrow 180^\circ \hat{=} \text{Gradmass (Umrechnung)}$

Bogenmass: $\frac{\text{Gradmass} \cdot \pi}{180^\circ} = \text{rad}$

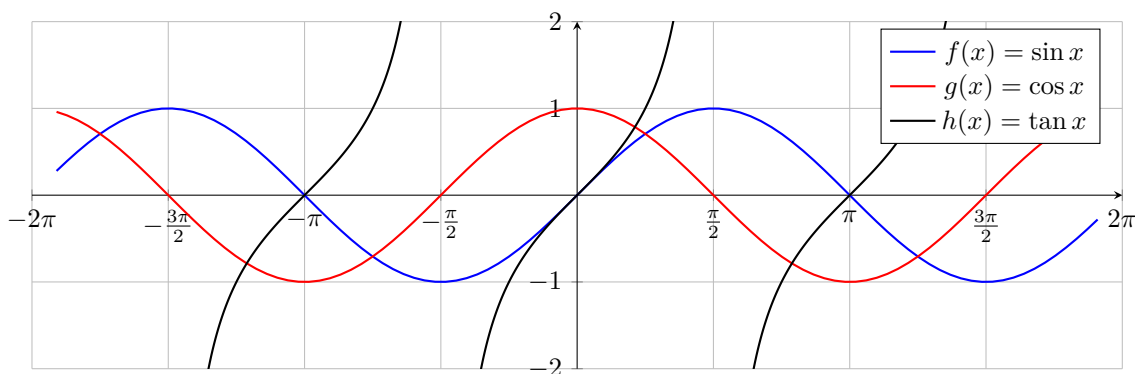
Abbildung 6: Winkelfunktionen am Einheitskreis



Beziehungen zwischen Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi &= 1 \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \\ 1 + \tan^2 \phi &= \frac{1}{\cos^2 \phi} \end{aligned} \quad (66)$$

Graphen



	sin	cos	tan
Perioden	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
Nullstellen	$\pi \pm \pi$	$\frac{\pi}{2} \pm \pi$	$\pi \pm \pi$
Maximum	$\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$	$2\pi \pm 2\pi$	
Minimum	$-\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$	$-\pi \pm 2\pi$	
Definitionslücken			$\frac{\pi}{2} \pm \pi$

Tabelle 10: Graphen von Winkelfunktionen

Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned}\sin^{-1} \phi &= \arcsin \phi \\ \cos^{-1} \phi &= \arccos \phi \\ \tan^{-1} \phi &= \arctan \phi\end{aligned}\quad (67)$$

5.1.2 Rechtwinkliges Dreieck

Berechnung von Strecken und Winkeln (Faktorisierung):

$$\begin{aligned}\text{Sinus} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \text{Cosinus} &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \text{Tangens} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\end{aligned}\quad (68)$$

$$\text{ebenfalls } \hat{=} a^2 + b^2 = c^2$$

5.1.3 Allgemeines Dreieck**Sinussatz**

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}\quad (69)$$

Cosinussatz

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma\end{aligned}\quad (70)$$

Flächenformel

$$A = \frac{ab}{2} \cdot \sin \gamma = \frac{ac}{2} \cdot \sin \beta = \frac{bc}{2} \cdot \sin \alpha\quad (71)$$

5.1.4 Goniometrische Gleichungen

$$\text{trig}(ax + b) = c\quad (72)$$

Trigonometrischer Koeffizient, konstantes Glied

Substitution (Vorgehen) und Rücksubstitution

$$\text{trig}(z) = c \Rightarrow z = ax + b \Rightarrow x = \frac{z - b}{a}\quad (73)$$

Funktion	Grundlösung für z	Periode
$\sin(z) = c$	$z_1 = \arcsin(c), z_2 = \pi - \arcsin(c)$	2π
$\cos(z) = c$	$z_{1, 2} = \pm \arccos(c)$	2π
$\tan(z) = c$	$z = \arctan(c)$	π

Tabelle 11: Übersicht: Trigonometrische Gleichungen

Berechnung weiterer Lösungen

Sinus:

$$\begin{aligned} \phi_{TR} = \phi_1 > 0, \text{ d.h.: } \phi_1; \phi_2 = \pi - \phi_1 \\ \phi_{TR} < 0, \text{ d.h.: } \phi_1 = 2\pi + \phi_{TR}; \phi_2 = \pi - \phi_{TR} \end{aligned} \tag{74}$$

Cosinus:

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_{TR} \\ \phi_2 = 2\pi - \phi_1 \end{aligned} \tag{75}$$

Tangens:

$$\begin{aligned} \phi_{TR} = \phi_1 > 0, \text{ d.h.: } \phi_1; \phi_2 = \pi + \phi_1 \\ \phi_{TR} < 0, \text{ d.h.: } \phi_1 = \pi + \phi_{TR}; \phi_2 = \pi + \phi_1 \end{aligned} \tag{76}$$

5.2 Vektorrechnung

5.2.1 Elementare Operationen

Vektorenberechnung

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow P(x; y; z) \tag{77}$$

Vektor als Komponente und Betrag

$$\begin{aligned} \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponent} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \hat{=} \text{Betrag} \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponent} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{=} \text{Betrag} \end{aligned} \tag{78}$$

Betrag $\hat{=}$ Länge eines Vektors

Vektoraddition / -subtraktion und skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \end{pmatrix} \\ t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_a \\ t \cdot y_a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{79}$$

5.2.2 Kollinearität / Komplanarität / Lineare Abhängigkeit

Die **Kollinearität** von Vektoren können durch das Multiplizieren der Komponente überprüft werden. Wenn die Komponente eines Vektor durch eine Multiplikation den Komponenten des anderen Vektors entspricht, sind die Vektoren kollinear (oder Vektorprodukt $\hat{=}$ 0). Mathematisch gilt für kollineare Vektoren:

$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0 \tag{80}$$

Die **Komplanarität** von Vektoren können durch die Darstellung als Linearkombinationen überprüft werden. Wenn die Vektoren gegenseitig durch Linearkombinationen dargestellt werden können, sind die Vektoren komplanar (oder Spatprodukt $\hat{=}$ 0). Mathematisch gilt für komplanare Vektoren:

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \tag{81}$$

Lineare Abhängigkeit

- Linear unabhängig: Keiner der Vektoren lässt sich als Linearkombination der anderen schreiben.
- Linear abhängig: Die Vektoren lassen sich als Linearkombination der anderen schreiben (bei 2 Vektoren: kollinear / bei 3 Vektoren: komplanar).

5.2.3 Ortsvektor

Pfeil (Repräsentant), bei dem der Ausgangspunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist.

$$\vec{0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (82)$$

Mittelpunkt M eines Ortsvektor (für $x = a$ und $y = a$):

$$\text{Aus } a_M = \frac{a_P + a_Q}{2} \text{ folgt } a_M = \frac{a}{2} \quad (83)$$

Ortsvektor des Schwerpunkts eines Dreiecks ABC :

$$\vec{0S} = \frac{1}{3} (\vec{0A} + \vec{0B} + \vec{0C}) \quad (84)$$

5.2.4 Skalarprodukt

Formel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \quad (85)$$

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} \text{Spitzer Winkel} &\hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \\ \text{Stumpfer Winkel} &\hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}| \\ \text{Rechter Winkel (orthogonal)} &\hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} && \text{Kommutativität} \\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} && \text{Distributivität} \\ (s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} &= s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) && \text{Skalar ausklammerbar} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &:= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi) && \text{Winkelberechnung} \end{aligned} \quad (87)$$

Winkelberechnung:

$$\phi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right) \quad (88)$$

5.2.5 Vektorprodukt

Formel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (89)$$

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} \text{Senkrecht} &\hat{=} \vec{a} \times \vec{b} \\ \text{Kollinear} &\hat{=} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \text{Fläche des Rechtecks} &\hat{=} \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned} \quad (90)$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{a} &= \vec{0} && \text{Nullvektor} \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= -(\vec{b} \times \vec{a}) && \text{nicht kommutativ, aber antisymmetrisch} \\
 (s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} &= s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) && \text{Skalar ausklammerbar} \\
 \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} && \text{Distributivgesetz}
 \end{aligned}
 \tag{91}$$

Flächenberechnung:

$$A = M |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi) \tag{92}$$

Volumenberechnung:

$$V = M (\vec{a} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|) \tag{93}$$

Multiplikationsfaktor M :

Fläche:

- Parallelogramm $\hat{=}$ 1
- Dreieck $\hat{=}$ $\frac{1}{2}$

Volumen:

- Spat $\hat{=}$ 1
- Tetraeder $\hat{=}$ $\frac{1}{6}$
- Dreiseitiges Prisma $\hat{=}$ $\frac{1}{2}$

5.3 Analytische Geometrie

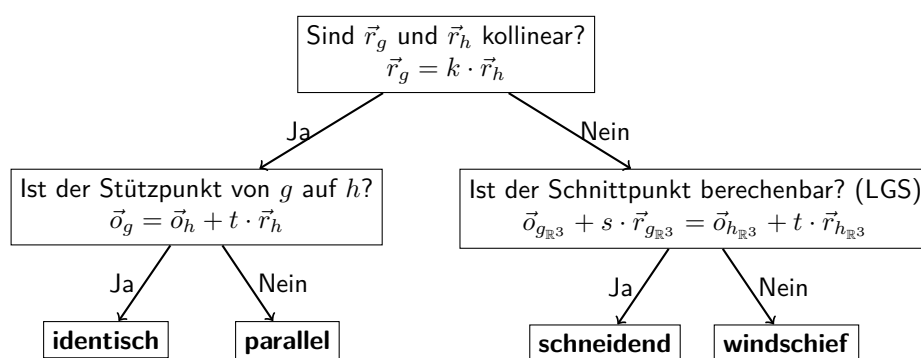
5.3.1 Geradengleichung

Parameterdarstellung und Koordinatenform:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{o} + s \cdot \vec{r} \quad \text{und} \quad ax + by + c = 0 \tag{94}$$

Lagebeziehungen:

$$g : \vec{x} = \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g \quad h : \vec{x} = \vec{o}_h + t \cdot \vec{r}_h \tag{95}$$



5.3.2 Ebenengleichung

Ebenen

Parameterdarstellung und Koordinatenform:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \quad \text{und} \quad ax + by + cz + d = 0 \tag{96}$$

Besonderheiten:

$$\begin{aligned}
 a = 0 &\Rightarrow by + cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{yz} \\
 b = 0 &\Rightarrow ax + cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{xz} \\
 c = 0 &\Rightarrow ax + by + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{xy} \\
 \\
 a = b = 0 &\Rightarrow cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_z \\
 b = c = 0 &\Rightarrow ax + d = 0 \hat{=} E \parallel E_x \\
 c = a = 0 &\Rightarrow by + d = 0 \hat{=} E \parallel E_y
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

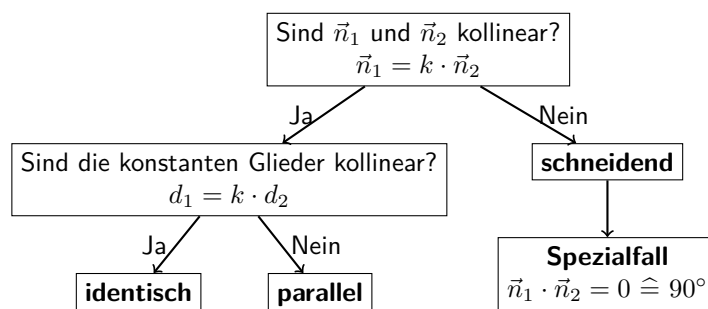
$$0 = ax + by + cz + d \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 && | \text{Parameterdarstellung} \\
 \vec{n} &= \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 && | \vec{n} \text{ mithilfe des Vektorprodukts bilden} \\
 [\vec{x} - \vec{o}] \cdot \vec{n} &= 0 && | \text{in die Normalenform einsetzen} \\
 \begin{pmatrix} x - o_x \\ y - o_y \\ z - o_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &&& | \text{Subtraktion} \\
 a(x - o_x) + b(y - o_y) + c(z - o_z) &= 0 && | \text{Skalarprodukt} \\
 ax + by + cz + \underbrace{(-ao_x - bo_y - co_z)}_d &= 0 && | \text{Faktorisierung} \\
 ax + by + cz + d &= 0 && | \text{Koordinatenform}
 \end{aligned}
 \tag{98}$$

Lagebeziehungen:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \tag{99}$$



5.3.3 Kugelgleichung

Koordinatenform mit $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ (Ortsvektor des Kreismittelpunkts M):

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2 \tag{100}$$

5.3.4 Schnittprobleme

Gerade-Ebene

Ausgangslage: Gerade und Ebene in Parameterdarstellung.

Berechnung:

$$\vec{o}_G + s \cdot \vec{r}_G = \vec{o}_E + t \cdot \vec{r}_{1,E} + u \cdot \vec{r}_{2,E} \tag{101}$$

$$\begin{aligned} o_{G,x} + r_{G,x}s &= o_{E,x} + r_{1,E,x}t + r_{2,E,x}u \\ o_{G,y} + r_{G,y}s &= o_{E,y} + r_{1,E,y}t + r_{2,E,y}u \\ o_{G,z} + r_{G,z}s &= o_{E,z} + r_{1,E,z}t + r_{2,E,z}u \end{aligned} \tag{102}$$

Diskussion:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 && | \text{ identisch} \\ s = t = u &= \zeta && | \text{ parallel / windschief} \\ s = s_0 \wedge t = t_0 \wedge u = u_0 &&& | \text{ schneidend} \end{aligned} \tag{103}$$

Ausgangslage: Gerade in Parameterdarstellung und Ebene in Koordinatenform.

Berechnung:

$$g : \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}}_{\vec{r}} \quad E : \underbrace{ax + by + cz + d}_{\vec{n}} \tag{104}$$

$$0 = a(o_x + r_x s) + b(o_y + r_y s) + c(o_z + r_z s) + d$$

Diskussion:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 && | \text{ identisch} \\ s &= \zeta && | \text{ parallel} \\ s &= s_0 && | \text{ schneidend} \end{aligned} \tag{105}$$

$s \vee t \vee u$ einsetzen, um Punkt S zu berechnen.

Ebene-Ebene

Ausgangslage: Zwei Ebenen in Koordinatenform.

Berechnung:

$$\begin{aligned} E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{106}$$

Diskussion:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 = k \cdot d_2 &&& | \text{ identisch} \\ \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 \neq k \cdot d_2 &&& | \text{ parallel} \\ \vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 \neq k \cdot d_2 &&& | \text{ schneidend} \end{aligned} \tag{107}$$

Schnittgerade:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{o}_S + t \cdot \vec{r}_S \\ \vec{o}_S &\hat{=} x = 0; y \wedge z \hat{=} \text{ im LSG lösen} \\ \vec{r}_S &\hat{=} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \end{aligned} \tag{108}$$

Ebene-Ebene-Ebene

Ausgangslage: Drei Ebenen in Koordinatenform.

Berechnung:

$$\begin{aligned}
 E_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\
 E_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\
 E_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0
 \end{aligned}
 \tag{109}$$

Diskussion:

Alle Gleichungen sind kollinear	identisch	
LGS hat genau eine Lösung $(x; y; z)$	schneidend (Schnittpunkt S)	(110)
LGS hat unendlich viele Lösungen ($0 = 0$)	schneidend (Schnittgerade g)	
LGS ist nicht lösbar	nicht schneidend (Prisma-Lage)	

Kugel-Gerade

Ausgangslage: Gerade in Parameterdarstellung und Kugel in Koordinatenform.

Berechnung:

$$\begin{aligned}
 g &: \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} & K &: (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2 \\
 & & & r^2 = ((o_x + r_x s) - m_x)^2 + ((o_y + r_y s) - m_y)^2 + ((o_z + r_z s) - m_z)^2
 \end{aligned}
 \tag{111}$$

Diskussion:

$s_{1,2}$	Sekante (zwei Schnittpunkte)	
s_1	Tangente (ein Schnittpunkt)	(112)
$s = \{ \}$	Passante (kein Schnittpunkt)	

 s einsetzen, um Punkt S zu berechnen.**Schnittwinkel**

Gerade-Gerade:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|} \right)
 \tag{113}$$

Gerade-Ebene:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arcsin \left(\frac{|\vec{r}_G \cdot (\vec{r}_{1,E} \times \vec{r}_{2,E})|}{|\vec{r}_G| \cdot |\vec{r}_{1,E} \times \vec{r}_{2,E}|} \right) \\
 \alpha &= \arcsin \left(\frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} \right)
 \end{aligned}
 \tag{114}$$

Ebene-Ebene:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)
 \tag{115}$$

5.3.5 Abstandsprobleme**Punkt-Gerade**Ausgangslage: Punkt P und Gerade g (mit Stützvektor \vec{o}) in Parameterdarstellung

$$d(P; g) = \frac{|\vec{oP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} \quad (116)$$

Punkt-EbeneAusgangslage: Punkt P und Ebene E in Koordinatenform (mit Punkt F , $F \in E$)

$$d(P; E) = \frac{|\vec{FP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (117)$$

Gerade-GeradeAusgangslage: Zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung (mit $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ und Stützvektoren \vec{o}_1 und \vec{o}_2)

$$d(g_1; g_2) = \frac{|\vec{o}_1 \vec{o}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (118)$$

Ausgangslage: Zwei parallele Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung (mit Stützvektoren \vec{o}_1 und \vec{o}_2 und Richtungsvektoren $r_1 = \lambda r_2$)

$$d(g_1; g_2) = \frac{|\vec{o}_1 \vec{o}_2 \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|} \quad (119)$$

Gerade-EbeneAusgangslage: Gerade g in Parameterform und Ebene E in Koordinatenform

$$d(g; E) = \frac{|a \cdot o_{g,x} + b \cdot o_{g,y} + c \cdot o_{g,z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (120)$$

Ebene-EbeneAusgangslage: Zwei Ebenen E_1 und E_2 in Koordinatenform (mit Punkt F , $F \in E_1$ und Punkt G , $G \in E_2$)

$$d(E_1; E_2) = \frac{|\vec{FG} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (121)$$

Index

- n -stufige Zufallsversuche, 22
- y -Achsenabschnitt, 11
- GAUSS'SCHE Eliminationsverfahren, 9

- Abhängige / unabhängige Ereignisse, 23
- Additionsverfahren, 9
- Assoziativgesetz, 6

- Baumdiagramm, 21
- Bestimmtes Integral, 18
- Bestimmung von Funktionsgleichung, 16
- Betrag, 6, 26
- Binomialkoeffizient, 4, 21
- Binomialverteilung, 22
- Binomische Formel, 6
- biquadratisch, 8

- Cosinussatz, 25

- Definitionsmenge, 14
- Diskussion, 7
- Distributivgesetz, 6

- Ebene-Ebene, 30, 32
- Ebene-Ebene-Ebene, 31
- Einfache Substitution, 20
- Erwartungswert, 23
- Explizite Darstellung, 10
- Exponentenvergleich, 8
- Exponentieller Wachstum / Zerfall, 8
- Extremalstellen, 15

- fares Spiel, 23
- Faktorregel, 20
- Fakultät, 21
- Flächenberechnung, 25, 28

- Gerade-Ebene, 30, 32
- Gerade-Gerade, 32
- Graphisches Ableiten, 13

- Horner-Schema, 14

- Kettenregel, 13
- Kombination, 21
- Kommutativgesetz, 6
- Koordinatenform, 28, 29
- Koordinatensystem, 5
- Kugel-Gerade, 31

- Lagebeziehungen, 28, 29
- Lineare Abhängigkeit, 26
- Logarithmus, 4, 7

- Logarithmusgesetze, 7

- Mehrfache Substitution, 20
- Mitternachtsformel, 8

- Normale, 13
- Normalenform, 29
- Nullstellen, 11, 14
- Numerusvergleich, 9

- Parameterdarstellung, 28
- Partialsommenformel, 10
- Permutation, 21
- Pfadregeln, 21
- Polstellen, 14
- Polynomdivision, 15
- Potenzgesetze, 6
- Produktregel, 13
- Punkt-Gerade, 32
- Punkte-Ebene, 32

- Quotientenregel, 13

- Rekursive Darstellung, 10

- Satz von BAYES, 23
- Schnittstellen, 11
- Schnittwinkel, 13, 31
- Sinussatz, 25
- Skalare Multiplikation, 26
- Stammfunktion, 4, 18
- Steigung, 11
- Stereometrie, 17
- Substitutionsverfahren, 9
- Summenregel, 20

- Tangente, 13
- Terrassenstellen, 15

- Umkehrfunktionen, 12, 25
- Unbestimmtes Integral, 18

- Variation, 21
- Vektoraddition / -subtraktion, 26
- Vektorberechnung, 26
- Volumenberechnung, 28

- Wahrscheinlichkeitsverteilung, 22
- Wendestellen, 15
- Winkelberechnung, 27
- Wurzelgesetze, 7

- Ähnlichkeit, 17

Tabellenverzeichnis

1	Symbole in der Mathematik	5
2	Griechisches Alphabet	5
3	Lösungsverfahren bei Potenzgleichungen	8
4	Übersicht der Differentialzusammenhänge	13
5	Vorgehen beim Horner-Schema	14
6	Vorgehen bei der Polynomdivision	15
7	Wörterbuch für die Funktionsdetektion	16
8	Stammfunktion aller Elementarfunktionen	18
9	Wahrscheinlichkeit bei ungenauer Anzahl Erfolgen	22
10	Graphen von Winkelfunktionen	24
11	Übersicht: Trigonometrische Gleichungen	25

Abbildungsverzeichnis

1	2D-Koordinatensystem	5
2	3D-Koordinatensystem	5
3	Strahlensätze	17
4	Richtungsfeld für $y' = xy$ und Kurve durch $y(0) = 1$	20
5	Entscheidungsbaum: Kombinatorik	21
6	Winkelfunktionen am Einheitskreis	24