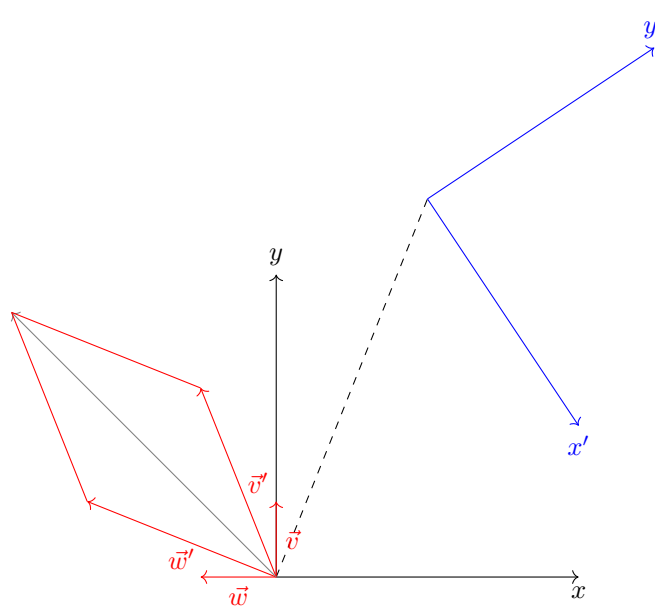


Übergang in die Lineare Algebra



Rosshan Ravinthrarasa

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1 Vektorrechnung	4
1.1 Vektoren	4
1.1.1 Darstellung: Komponenten- und Betragsschreibweise	4
1.1.2 Richtung eines Vektors	4
1.2 Vektoroperationen	5
1.2.1 Vektoraddition / -subtraktion	5
1.2.2 Skalare Multiplikation	5
1.2.3 Skalarprodukt	5
1.2.4 Vektorprodukt	6
1.2.5 Spatprodukt	6
1.3 Beziehungen zwischen Vektoren	7
1.3.1 Lineare Abhängigkeit	7
1.3.2 Kollinearität und Komplanarität	7
2 Analytische Geometrie	8
3 Matrizen	9
3.1 Matrizenoperationen	9
3.1.1 Matrizenaddition / -subtraktion	9
3.1.2 Skalare Multiplikation	9
3.1.3 Matrizenmultiplikation	10
3.1.4 Transposition	10
3.1.5 Inversion I	10
3.2 Determinanten	11
3.2.1 Idee der Determinante	11
3.2.2 Determinantenbestimmung	11
3.2.3 Inversion II	12
3.2.4 Lineare Gleichungssysteme	12
4 Vektorräume	14
4.1 Basis	14
4.1.1 Basiswechsel	15
4.2 Lineare Hülle	15
5 Abbildungen	16
5.1 Abbildungsoperationen	17
5.1.1 Umkehrungen	17
5.1.2 Verkettungen	17
5.2 Spezielle Abbildungen	17
5.2.1 Rotation	18
5.2.2 Spiegelung	19
6 Eigenvektoren	21
6.1 Eigenwerte	21
6.2 Charakteristisches Polynom	22
A Anwendungen	23
Physik	23
Informatik	23
Ingenieurwesen	24
Maschinenbau	24

Vorwort

An den meisten Universitäten beginnt das Mathematikstudium mit der linearen Algebra. Gut. Was mit der Algebra gemeint ist, sollte jede Gymnasiastin und jeder Gymnasiast wissen. Was ist die lineare Algebra? Die komplizierte Erklärung ist...

Lineare Algebra ist der Teil der Mathematik, der sich systematisch mit linearen Strukturen und deren Transformationen beschäftigt. Sie untersucht insbesondere lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren, die Eigenschaften und Verhalten von linearen Abbildungen charakterisieren. Ausserdem befasst sie sich mit Operationen wie Matrixmultiplikation, Inversion und Diagonalisierung, die es erlauben, lineare Zusammenhänge algebraisch zu analysieren und zu lösen. Ziel der linearen Algebra ist es, die Strukturen und Beziehungen in linearen Systemen zu verstehen, zu klassifizieren und berechenbar zu machen, sowohl theoretisch als auch mit praktischen Rechenverfahren.

Kurzgesagt: Es ist eine wilde Mischung von Algebra, Analysis und Geometrie. Vieles, was im gymnasialen Unterricht das Zentrum war, ist hier verblüffenderweise nun ein Werkzeug. Die meisten Werkzeuge werden zudem im weiterführenden Mathematikunterricht, beispielsweise Schwerpunkt- und Ergänzungsfächer, unterrichtet, was nun die Verknüpfung zwischen der Mathematik aus dem Gymnasium und der Mathematik an der Universität unklarer macht. Dieses Skriptum ist demnach auch keine Einführung in die Lineare Algebra, sondern nur ein Übergang für Maturandinnen und Maturanden, die vor einem Studium stehen, welche teilweise bis ganz mit Mathematik zu tun haben.

Dieses Skriptum dient als Übergang zwischen Gymnasium und dem Beginn des Studium in Themenbereich der Linearen Algebra, indem es die Grundlagen aus dem Gymnasium auffrischt und die neuen Kompetenzen grundlegend näher bringt.

Rosshan Ravinthrarasa, Autor

1 Vektorrechnung

1.1 Vektoren

Unter einem Vektor versteht man die Menge aller Pfeile gleicher Länge (Betrag), gleicher Richtung und gleicher Orientierung. Ausgerückt kann es durch einen Pfeil, der als Repräsentant des Vektors agiert und per Definition ein geordnetes Paar von Punkten in der Ebene oder im Raum ist.

Ein Vektor wird komponentenweise durch die Horizontal- und Vertikaldifferenz der Anfangs- und Endpunkte des Vektors berechnet.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} \quad (1)$$

1.1.1 Darstellung: Komponenten- und Betragsschreibweise

Vektoren werden typischerweise in der Komponentenschreibweise dargestellt. Dabei unterscheidet man zwischen Spalten- und Zeilenvektoren.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (x \quad y \quad z) \quad (2)$$

Spaltenvektor *Zeilenvektor*

Bei der Betragsschreibweise wird die Wurzel der quadrierten und danach aufsummierten Komponenten berechnet. Der Betrag eines Vektors entspricht dessen Länge.

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{v}| := v \quad (3)$$

bzw.

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{v}| := v \quad (4)$$

1.1.2 Richtung eines Vektors

Ein Vektor beschreibt unter anderem dessen Richtung in der Ebene (zweidimensional) bzw. im Raum (dreidimensional).

Zwei Vektoren haben die gleiche Richtung, wenn der eine Vektor das Vielfache des anderen Vektors entspricht.

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \quad (5)$$

Aus einem Vektor kann man Länge und Richtung ablesen. Wenn man jedoch die eindeutige Richtung (unabhängig von der Länge) wissen will, braucht man den normierten Richtungsvektor.

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} \quad (6)$$

Somit ist die Richtung eines Vektors klar, da die Länge mathematisch keine Rolle spielt (bzw. eins entspricht).

1.2 Vektoroperationen

1.2.1 Vektoraddition / -subtraktion

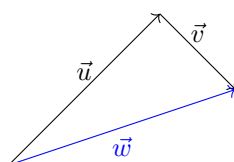
Vektoren können addiert und subtrahiert werden:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \pm x_v \\ y_u \pm y_v \end{pmatrix} \quad (7)$$

Bei der Vektoraddition gelten die gleichen Rechengesetze. Sie sind also...

- ... kommutativ: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- ... assoziativ: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$

Graphisch wird die Vektoraddition in Form $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ folgendermassen dargestellt.



1.2.2 Skalare Multiplikation

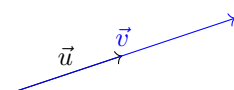
Vektoren können mit einem Skalar vervielfacht werden. Ebenfalls kann die Richtung antiparallel verändert werden, wenn der Skalar negativ ist. Dadurch wird das Vorzeichen des Vektors alterniert.

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_u \\ \lambda \cdot y_u \end{pmatrix} \quad (8)$$

Bei der skalaren Multiplikation gelten die gleichen Rechengesetze. Sie sind also...

- ... distributiv: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

Graphisch wird die skalare Multiplikation in Form $\lambda\vec{u} = \vec{v}$ folgendermassen dargestellt.



1.2.3 Skalarprodukt

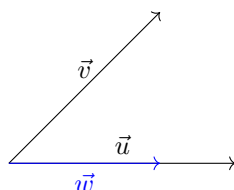
Vektoren können komponentenweise multipliziert und dann addiert werden. Diese Operation nennt sich Skalarprodukt.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n \quad (9)$$

Beim Skalarprodukt gelten die gleichen Rechengesetze. Sie sind also...

- ... kommutativ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ... assoziativ: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
- ... distributiv: $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Graphisch wird das Skalarprodukt in Form $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w}$ folgendermassen dargestellt.



Wenn das Skalarprodukt null ergibt, liegen die beiden Vektoren senkrecht zueinander.

1.2.4 Vektorprodukt

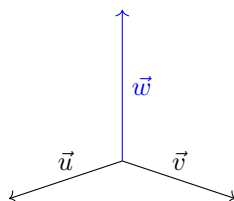
Vektoren können mit einem anderen Vektor „überkreuz multipliziert“ werden.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Beim Vektorprodukt gelten die nicht die gleichen Rechengesetze. Diese Operation ist nur...

- ... distributiv: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
bzw. Skalar ausklammerbar: $(\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

Graphisch wird das Vektorprodukt in Form $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ folgendermassen dargestellt.



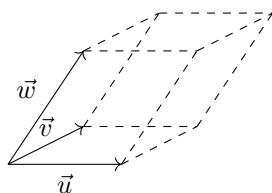
\vec{w} liegt immer senkrecht auf \vec{u} und \vec{v} . Ebenfalls entspricht der Betrag vom Vektor \vec{w} der Fläche des vom Vektor \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Parallelogramms.

1.2.5 Spatprodukt

Vektoren können mit einem anderen Vektor „überkreuz multipliziert“ und zusätzlich mit einem anderen Vektor komponentenweise multipliziert und dann addiert werden.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (11)$$

Graphisch wird das Spatprodukt in Form $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ folgendermassen dargestellt.



Mit dem Spatprodukt wird das Volumen vom Vektor \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Spat berechnet.

1.3 Beziehungen zwischen Vektoren

1.3.1 Lineare Abhängigkeit

Die *linear unabhängigen* Vektoren lassen sich in keiner Weise als Linearkombination des anderen Vektors schreiben.

Die *linear abhängigen* Vektoren lassen sich als Linearkombination der anderen schreiben. Allgemeine Form einer Linearkombination:

$$\vec{w} = \lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} \quad (12)$$

Wenn zwei Vektoren linear abhängig sind, spricht man von kollinearen Vektoren und wenn drei Vektoren linear abhängig sind, spricht man von komplanaren Vektoren.

1.3.2 Kollinearität und Komplanarität

Die *Kollinearität* von Vektoren können durch das Multiplizieren der Komponente überprüft werden. Wenn die Komponente eines Vektor durch eine Multiplikation den Komponenten des anderen Vektors entspricht, sind die Vektoren kollinear (oder Vektorprodukt $\hat{=}$ 0). Mathematisch gilt für kollineare Vektoren:

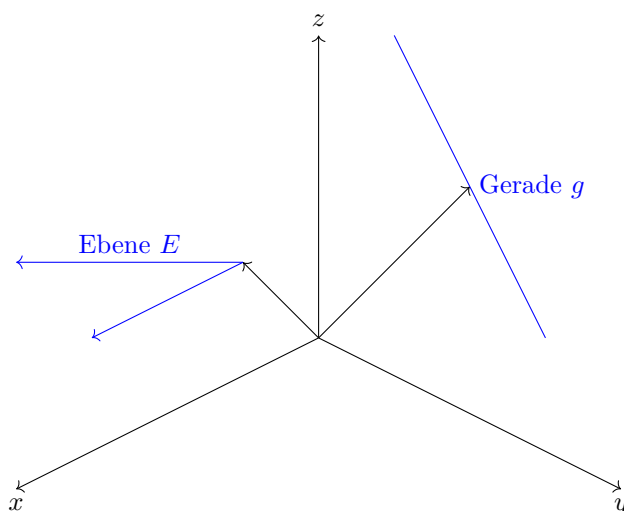
$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \vec{u} \times \vec{v} = 0 \quad (13)$$

Die *Komplanarität* von Vektoren können durch die Darstellung als Linearkombinationen überprüft werden. Wenn die Vektoren gegenseitig durch Linearkombinationen dargestellt werden können, sind die Vektoren komplanar (oder Spatprodukt $\hat{=}$ 0). Mathematisch gilt für komplanare Vektoren:

$$\vec{w} = \lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \quad (14)$$

2 Analytische Geometrie

Die Analytische Geometrie ist im Vergleich zur Vektor- oder Matrizenrechnung eher ein spezieller Anwendungsfall der Linearen Algebra im zwei- und dreidimensionalen Raum. Daher wird dieses Kapitel bewusst kompakt gehalten.



Geraden

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{o} + s \cdot \vec{r} \quad ax + by + c = 0 \quad (15)$$

Parameterdarstellung *Koordinatenform*

Ebenen

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (16)$$

Parameterdarstellung *Koordinatenform*

Schnittprobleme

Die typischen Schnittprobleme (Gerade-Gerade, Gerade-Ebene, etc.) werden gelöst, indem deren Gleichungen in einem linearen Gleichungssystem, was in der Linearen Algebra von zentraler Bedeutung ist, aufgestellt und nach den unbekannt Parametern gelöst wird. Mit diesen Parametern werden die Geraden bzw. die Ebenen so gestreckt, dass der Schnittpunkt resultiert.

Der Schnittwinkel wird mit einer Formel, die vom Skalarprodukt hergeleitet wird, berechnet.

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (17)$$

Abstandsprobleme

Abstandsprobleme werden gelöst, indem der kürzeste Verbindungsvektor zwischen den Objekten bestimmt wird. Dieser steht stets orthogonal (senkrecht) auf den beteiligten Geraden oder Ebenen. In der Linearen Algebra entspricht dies einer orthogonalen Projektion, bei der das Skalarprodukt genutzt wird, um den Punkt im Raum zu finden, der dem Zielobjekt am nächsten liegt.

3 Matrizen

Ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten heisst $m \times n$ -Matrix. Matrizen werden mit Grossbuchstaben ($A; B; C; \dots$) bezeichnet. Die einzelnen Einträge der Matrix sind Komponenten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$m \times n$ heisst Grösse der Matrix. Ist $m = n$, so heisst die Matrix quadratisch.

3.1 Matrizenoperationen

3.1.1 Matrizenaddition / -subtraktion

Die Summe bzw. Differenz zweier Matrizen gleicher Grösse werden berechnet, indem die Komponenten an der gleichen Stelle addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\begin{aligned} A \pm B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij}) \end{aligned} \quad (19)$$

Es gelten: Kommutativgesetz und Assoziativgesetz.

$$A + B = B + A \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (20)$$

3.1.2 Skalare Multiplikation

Die Multiplikation einer Matrix wird berechnet, indem ein Skalar mit jeder Komponente multipliziert wird.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = k(a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) \quad (21)$$

Es gelten: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz.

$$kA = Ak \quad k(l \cdot A) = (k \cdot l)A \quad k(A + B) = kA + kB \quad (22)$$

3.1.3 Matrizenmultiplikation

Das Produkt einer $l \times m$ -Matrix mit einer $m \times n$ -Matrix ist eine $l \times n$ -Matrix, bei der das Skalarprodukt der i -ten Zeile der ersten Matrix mit der j -ten Spalte der zweiten Matrix.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = A \cdot B \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1m}b_{mn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2m}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2m}b_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}b_{11} + a_{l2}b_{21} + \cdots + a_{lm}b_{m1} & a_{l1}b_{12} + a_{l2}b_{22} + \cdots + a_{lm}b_{m2} & \cdots & a_{l1}b_{1n} + a_{l2}b_{2n} + \cdots + a_{lm}b_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix} = C
 \end{aligned} \tag{23}$$

3.1.4 Transposition

Wenn $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix ist, ist die transponierte Matrix $A^T = (a_{ji})$ eine $n \times m$ -Matrix. Die Zeilen von A werden zu Spalten von A^T und die Spalten von A werden zu Zeilen von A^T .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Die vier Eigenschaften der Transposition einer Matrix:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T = B^T \cdot A^T$

3.1.5 Inversion I

Bei einer Matrix A und seiner Inversion A^{-1} gilt: $A \cdot A^{-1} = E$. E entspricht der Einheitsmatrix.

Gauss-Jordan-Algorithmus zum Bestimmen der Inversen einer Matrix.

Man ergänzt die $n \times n$ -Matrix A zu einer $n \times 2n$ -Matrix, indem man rechts die Einheitsmatrix einfügt. Man verwandelt diese Matrix in eine Matrix, in welcher die Einheitsmatrix steht. D.h. dort, wo A steht, steht nachher E und dort wo E steht, wird A^{-1} stehen.

Zulässige Schritte sind:

1. Eine Zeile mit einer Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.
2. Zwei Zeilen vertauschen.
3. Eine Zeile ersetzen durch eine Linearkombination von sich und einer anderen Zeile.

3.2 Determinanten

Die Determinante einer Matrix M gibt den Faktor an, um den sich im zweidimensionalen der Flächeninhalt und im dreidimensionalen das Volumen unter der Abbildung vervielfacht.

3.2.1 Idee der Determinante

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ \text{II} \quad a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{array} \quad (25)$$

folgt die Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

woraus die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c} \quad (27)$$

folgt.

Das lineare Gleichungssystem wird allgemein gelöst, indem der Schritt $a_{21} \cdot \text{I} - a_{11} \cdot \text{II}$ durchgeführt wird.

$$\begin{aligned} a_{21}a_{12}y - a_{11}a_{22}y &= a_{21}c_1 - a_{11}c_2 \\ y(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) &= a_{21}c_1 - a_{11}c_2 \\ y &= \frac{a_{21}c_1 - a_{11}c_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}} \end{aligned} \quad (28)$$

Der charakteristische Term $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$ ist entscheidend dafür, ob das Gleichungssystem eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat.

Definition: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heisst Determinante der Matrix A .

$$\begin{array}{ll} \det A \neq 0 \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{c} & \text{hat genau eine Lösung, reguläre (invertierbare) Matrix} \\ \det A = 0 \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{c} & \text{hat keine oder unendlich viele Lösungen, singuläre Matrix} \end{array} \quad (29)$$

3.2.2 Determinantenbestimmung

Determinante einer 2×2 -Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (30)$$

Determinante einer 3×3 -Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \quad (31)$$

Es gelten:

$$\begin{aligned} \det AB &= \det A \cdot \det B \\ \det A^T &= \det A \end{aligned} \quad (32)$$

3.2.3 Inversion II

Inverse einer 2×2 -Matrix:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (33)$$

Inverse einer 3×3 -Matrix:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \quad (34)$$

3.2.4 Lineare Gleichungssysteme

2×2 -Gleichungssystem

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1 \\ a_2x + b_2y &= k_2 \end{aligned} \quad (35)$$

folgen die Determinanten

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

mit den folgenden Bedingungen.

$$\begin{aligned} D \neq 0 & \quad \text{eindeutig lösbar} \quad x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D} \\ D = 0, D_x \vee D_y \neq 0 & \quad \text{keine Lösungen} \\ D = D_x = D_y = 0 & \quad \text{unendliche viele oder keine Lösungen} \end{aligned} \quad (37)$$

3×3 -Gleichungssystem

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned} \quad (38)$$

folgen die Determinanten

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_z = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (39)$$

mit den folgenden Bedingungen.

$$\begin{aligned} D \neq 0 & \quad \text{eindeutig lösbar} \quad x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \\ D = 0, D_x \vee D_y \vee D_z \neq 0 & \quad \text{keine Lösungen} \\ D = D_x = D_y = D_z = 0 & \quad \text{unendliche viele oder keine Lösungen} \end{aligned} \quad (40)$$

$n \times n$ -Gleichungssystem

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (41)$$

folgt die Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (42)$$

woraus die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (43)$$

folgt.

Homogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$

Lösungen:

- $\vec{x} = \vec{0}$ ist immer Lösung.
- Ist $\det A = 0$, so gibt es unendlich viele Lösungen.

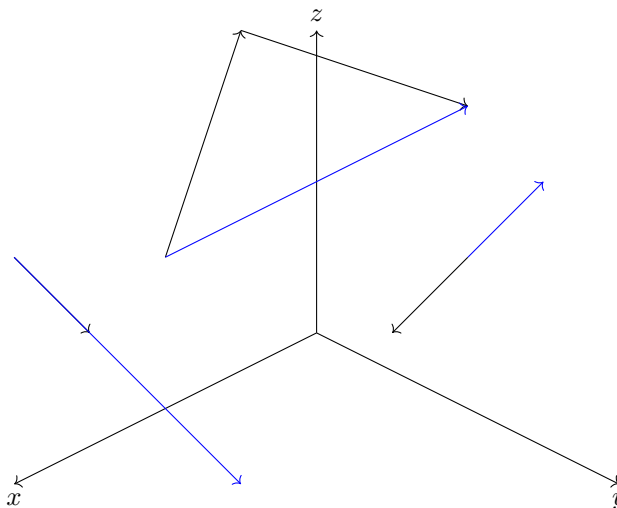
Inhomogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

Lösungen:

- Ist $\det A \neq 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
- Ist $\det A = 0$, so gibt es keine oder unendlich viele Lösungen.

4 Vektorräume

Sowohl die Vektoraddition als auch die skalare Multiplikation sind Vektoroperationen, die in einem zwei- bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem gebraucht werden. Jedoch geschehen diese Operationen in einem eingeschränkten Rahmen, über die man bei trivialen Rechnungen nicht spricht. Die Einschränkung, die diese Operationen überhaupt erlauben, heissen Vektorräume.



Ein Vektorraum V über einem Körper K (Skalare aus \mathbb{R} , die in V gebraucht werden) ist eine Menge von Vektoren, auf der zwei Operationen definiert sind: die Vektoraddition durch $+$: $V \times V \rightarrow V$ und die skalare Multiplikation durch \cdot : $K \times V \rightarrow V$.

Zusätzlich müssen für alle Vektoren im Vektorraum V ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$) und alle Skalare im Körper K ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) folgende Axiome erfüllen:

1. Eindeutiges Element $0 \in V$, so dass $0 + \vec{v} = \vec{v} + 0 = \vec{v}$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
4. Eindeutiges Element $-\vec{v} \in V$, so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = 0$
5. $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
6. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
7. $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$
8. Eindeutiges Element $1 \in K$, so dass $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Die Elemente eines Vektorraums V nennt man per Definition Vektoren.

4.1 Basis

Die *Basis* (auch: minimales Erzeugendensystem) ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren \vec{b} ($\{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\} \subset V$), die den gesamten Vektorraum V bilden, da jeder Vektor \vec{v} ($\vec{v} \in V$) durch eine Linearkombination der (ineinander) linear unabhängigen Vektoren b mithilfe des Skalars λ ($\{\lambda_1; \dots; \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$) ausgedrückt werden muss.

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i \quad (44)$$

Dimensionen und Standardbasis

Der grösste Index n des *Basisvektors* \vec{b} entspricht der *Dimension* des erzeugten Vektorraumes, welches oft mit $\dim V = n$ beschrieben werden kann.

Die Basisvektor, die den Einheitsvektoren entsprechen, nennt man *Standardbasis*. Beispiel in...

- ... \mathbb{R}^2 : $\{(1, 0); (0, 1)\}$
- ... \mathbb{R}^3 : $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
- ... \mathbb{R}^4 : $\{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$

4.1.1 Basiswechsel

Beim Basiswechsel wird die Basis gewechselt, wodurch die Skalar sich auch ändern. So folgt aus

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i \quad (45)$$

die Linearkombination mit der neuen Basis,

$$\vec{v} = \lambda'_1 \vec{b}'_1 + \lambda'_2 \vec{b}'_2 + \dots + \lambda'_n \vec{b}'_n = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \vec{b}'_i \quad (46)$$

wofür eine Transformationsmatrix gebraucht wird.

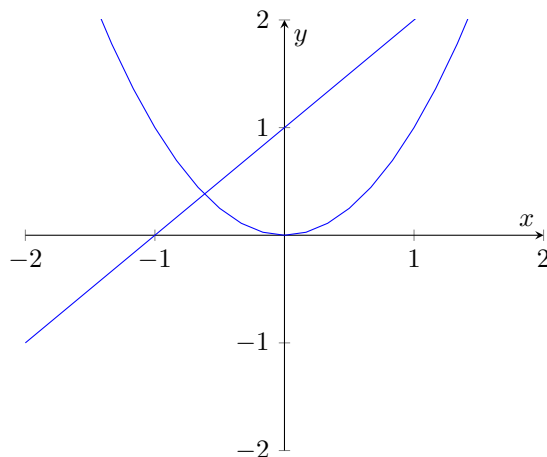
$$T_{B'}^B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (47)$$

4.2 Lineare Hülle

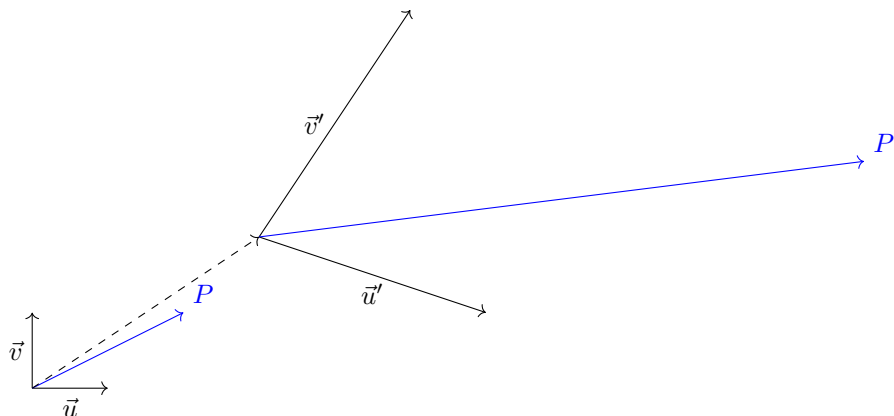
Ein Vektorraum V hat m linear unabhängige Vektoren \vec{v} ($\vec{v}_1; \dots; \vec{v}_m \subset V$), wobei $m \leq \dim V$ entspricht und als Teilmenge eines Vektorraums noch ein Vektorraum bildet, was dem *Untervektorraum* entspricht. Dieser Untervektorraum wird ebenfalls als lineare Hülle bezeichnet und wird als $\text{span}(v_1; \dots; v_m)$ notiert.

5 Abbildungen

Eine Abbildung ist, wenn etwas anders abgebildet wird. Diese Definition ist auf keiner Weise mathematisch, aber das Prinzip kennt man bereits aus der Analysis. Die Funktionen. Bei einer Funktion wird ein Element aus dem Definitionsbereich auf ein Element im Zielbereich abgebildet oder kurzgesagt: jedem x -Wert wird ein y -Wert zugeordnet oder auch $x \mapsto f(x)$ (dadurch sind Funktionsgleichungen auch eine Zuordnungsschreibweise). Die Funktionen sind jedoch eine Spezialfall der Abbildungen. Im folgenden geht es vorerst und vor allem um affine Abbildungen.



Abbildungen, in diesem Fall affine Abbildungen und keine Funktionen, sind geometrische Transformationen, die Punkte, Gerade und Ebenen abbilden, wobei Parallelität und Verhältnisse erhalten bleiben. Kurzgefasst sind affine Abbildungen parallelentreu, geradentreu und teilverhältnistreu. Graphisch kann man die affine Abbildung im \mathbb{R}^2 wie in der folgenden Grafik (bspw.) darstellen.



Folgerichtig kann man sagen, dass

$$\begin{aligned} P &\mapsto P' \\ \vec{v} &\mapsto \vec{v}' \\ \vec{u} &\mapsto \vec{u}' \end{aligned} \tag{48}$$

entspricht, woraus die Definition der Abbildung

$$f : A \rightarrow A' \tag{49}$$

folgt.

Bei Abbildungen gibt es zusätzlich folgende Terminologie:

- Ein **Fixpunkte** einer Abbildung ist ein Punkt, der unter der Abbildung unverändert bleibt.
- Eine **Fixpunktgerade** ist eine Gerade, die aus Fixpunkten besteht, d.h. jeder Punkt der Gerade wird durch die Abbildung auf sich selber abgebildet.
- Eine **Fixgerade** ist eine Gerade, die auf sich selber abgebildet wird, die einzelnen Punkten auf der Geraden verschieben sich allerdings.

5.1 Abbildungsoperationen

5.1.1 Umkehrungen

Bildet eine Abbildung

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{b} \quad (50)$$

einen Punkte P auf P' ab, so bildet die *Umkehrabbildung* wieder P' auf P ab. Die Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung erhält man durch einfaches Umformen der Gleichung,

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{x}' - \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot (\vec{x}' - \vec{b}) \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{x}' - A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (51)$$

woraus die Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung folgt.

$$\vec{x}' = A^{-1} \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{b} \quad (52)$$

5.1.2 Verkettungen

Verkettet man zwei affine Abbildungen $\beta \circ \alpha$ (sprich: beta nach alpha) miteinander, so führt man zuerst α und dann β aus.

$$\Rightarrow \alpha : \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{a}$$

$$\Rightarrow \beta : \vec{x}'' = B \cdot \vec{x}' + \vec{b}$$

Daraus folgt.

$$\beta \circ \alpha : \vec{x}'' = B \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{a}) + \vec{b} = B \cdot A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{a} + \vec{b} \quad (53)$$

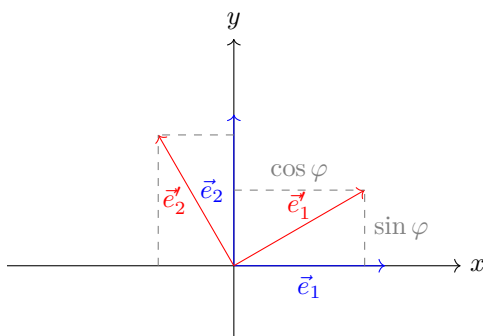
5.2 Spezielle Abbildungen

Bei den speziellen Abbildungen handelt es sich von Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften. Diese gibt es bei Rotation, Spiegelungen, Projektionen mit Parallelprojektionen (wie zum Beispiel der Schattenwurf) und Zentralprojektionen und linearen Abbildungen.

Im folgenden Kapitel liegt der Fokus auf die Grundlagen der Rotation und Spiegelung.

5.2.1 Rotation

Aus dem Beispiel der Rotation der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Winkel φ



folgt die Abbildungsgleichung einer Rotation in \mathbb{R}^2

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = D_\varphi \cdot \vec{x} \tag{54}$$

mit der Rotationsmatrix aus \vec{e}_1' und \vec{e}_2' .

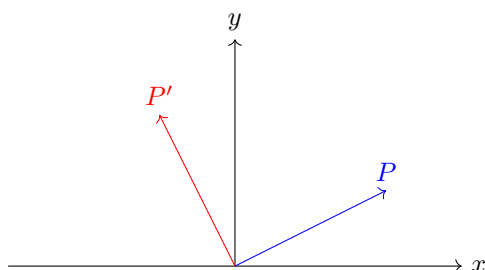
$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \tag{55}$$

Bei einer Rotation um den Winkel φ und θ werden die Rotationsmatrizen multipliziert.

$$\begin{aligned} D_\varphi \cdot D_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) & -\sin(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) & \cos(\varphi + \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{56}$$

Eine Veranschaulichung mit trivialen Winkeln

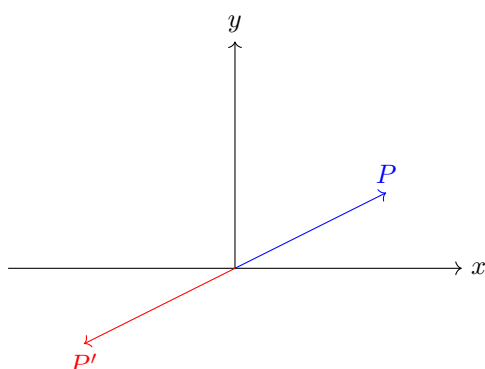
1. Fall: Drehung um den Ursprung um 90°



$$\begin{aligned} \text{geg.: } &P(x; y) \\ \text{ges.: } &P'(x; y) \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D_{90}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Fall: Drehung um den Ursprung um 180°

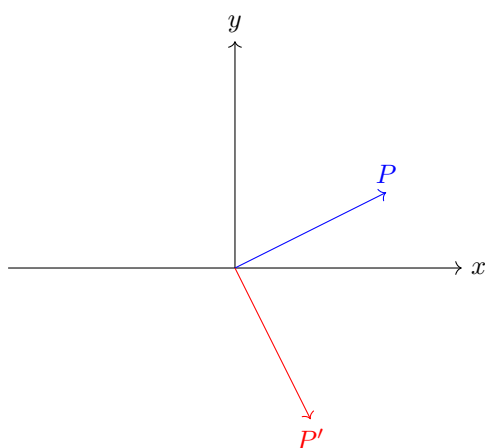


geg.: $P(x; y)$

ges.: $P'(x; y)$

$$\begin{aligned} D_{90} \cdot D_{90} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_{180} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D_{180}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

3. Fall: Drehung um den Ursprung um -90°



geg.: $P(x; y)$

ges.: $P'(x; y)$

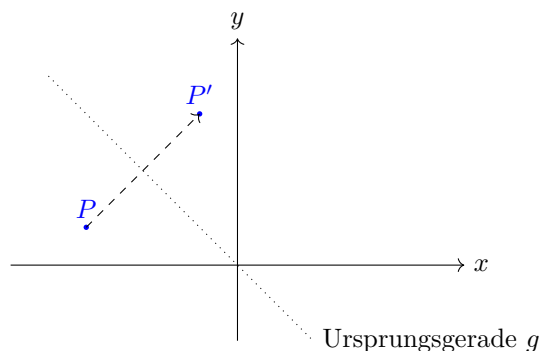
$$\begin{aligned} D_{-90} &= D_{90}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{D_{-90}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

5.2.2 Spiegelung

Die Orthogonalspiegelung an der x -Achse kann durch die folgende Abbildungsmatrix S_x beschrieben werden.

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Hier geht es jedoch um einen Spezialfall. Anders wird bei weniger trivialen Fällen. Beispielsweise bei der Spiegelung an der Ursprungsgerade g .



Mathematisch findet bei der Spiegelung an der Ursprungsgerade folgende Schritte statt:

1. Drehen um $-\varphi$
2. Spiegeln an der x -Achse
3. Zurückdrehen

$$\Rightarrow D_\varphi \left(S_x \left(D_{-\varphi} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right)$$

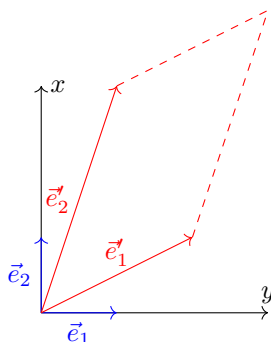
Herleitung von S_φ :

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{\cos \varphi \cos(-\varphi)}_{\cos \varphi} + \underbrace{\sin \varphi \sin(-\varphi)}_{-\sin \varphi} & -\cos \varphi \sin(-\varphi) + \sin \varphi \cos(-\varphi) \\ \cos(-\varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \sin(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \quad (61) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6 Eigenvektoren

In diesem Kapitel werden die Eigenvektoren mit den wesentlichen Punkten, wie zum Beispiel Eigenwerte und charakteristisches Polynom und charakteristische Gleichung, anhand eines Beispiels erarbeitet.

Wir betrachten die Abbildung $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.



Gibt es Vektoren, deren Bild kollinear zu sich selbst ist? Ja. Diese Vektoren heissen *Eigenvektoren*.

6.1 Eigenwerte

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (62)$$

mit:

- λ heisst Eigenwert
- \vec{v} heisst Eigenvektor der Matrix A

Zwei Bemerkungen:

1. Ist \vec{v} ein Eigenvektor, dann ist auch $k\vec{v}$ ein Eigenvektor. Eine Matrix hat immer keine oder unendlich viele Eigenvektoren.
2. Das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ A\vec{v} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_E \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (63)$$

$$A\vec{v} - \lambda E\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

Damit ein Eigenvektor existiert, muss

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (64)$$

sein.

6.2 Charakteristisches Polynom

Der Term $\det(A - \lambda E) = 0$ heisst charakteristisches Polynom der Matrix A .

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}\tag{65}$$

Daraus folgend die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

A Anwendungen

Die Lineare Algebra findet in verschiedenen Naturwissenschaften breite Anwendungen. Nebst in der Mathematik selbst werden Teile der linearen Algebra auch in der Physik, Informatik, Ingenieurwesen, Maschinenbau und vielem mehr gefunden. Im folgenden werden einige Beispiele aufgeführt.

Physik (Kräfte und Elektrotechnik)

In der klassischen Mechanik werden physikalische Grössen wie Kräfte, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen durch Vektoren modelliert, da sie sowohl einen Betrag als auch eine Richtung besitzen. Betrachtet man etwa zwei Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (66)$$

so ergibt sich die resultierende Kraft durch komponentenweise Addition:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Hier zeigt sich direkt die Rolle der Vektorrechnung als Modell für physikalische Überlagerung.

Transformationen von Koordinatensystemen, etwa bei Drehungen eines Körpers, werden durch lineare Abbildungen beschrieben. Eine Rotation um einen Winkel θ wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (68)$$

modelliert, sodass ein Vektor \vec{x} in die neue Lage

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad (69)$$

überführt wird.

Ein besonders tiefer Zusammenhang zeigt sich bei Schwingungssystemen. Hier treten Eigenwerte und Eigenvektoren auf in Gleichungen der Form

$$Av = \lambda v \quad (70)$$

Die Eigenwerte λ beschreiben die Eigenfrequenzen eines Systems, während die Eigenvektoren die zugehörigen Schwingungsmoden darstellen.

Elektrische Netzwerke werden durch lineare Gleichungssysteme beschrieben:

$$A\vec{I} = \vec{U} \quad (71)$$

wobei I Ströme und U Spannungen sind.

In dynamischen Systemen bestimmen Eigenwerte das Frequenzverhalten. Beispielsweise geben sie an, bei welchen Frequenzen ein System resoniert.

Informatik (Computergraphik und Künstliche Intelligenz)

In der Computergraphik wird die Position eines Objekts durch Vektoren beschrieben, etwa

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \quad (72)$$

Transformationen wie Rotation, Skalierung oder Projektion werden durch Matrizen realisiert. Eine Szene entsteht durch sukzessive Anwendung solcher Transformationen:

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \vec{p} \quad (73)$$

Hier entspricht jede Matrix einer linearen Abbildung, etwa einer Drehung oder Skalierung.

In einer typischen Rendering-Pipeline werden Millionen solcher Operationen durchgeführt. Die gesamte Geometrie eines Spiels basiert daher auf Matrixmultiplikation und Vektorrechnung.

In der KI werden Datenpunkte als Vektoren dargestellt. Ein neuronales Netz besteht im Kern aus hintereinander geschalteten linearen Abbildungen:

$$\vec{x}' = A\vec{x} + b \quad (74)$$

Hier ist A eine Gewichtsmatrix. Jede Schicht transformiert die Daten in einen neuen Raum. Eigenwerte spielen indirekt eine Rolle, etwa bei der Stabilität von Trainingsprozessen.

Ingenieurwesen

Technische Systeme führen oft auf lineare Gleichungssysteme. In der Statik beispielsweise werden Kräfte in einem Tragwerk durch ein System

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (75)$$

beschrieben, wobei \vec{x} unbekannte Kräfte sind.

Die Lösbarkeit hängt von der Determinante ab:

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \text{eindeutige Lösung} \quad (76)$$

In Simulationen (z.B. Finite-Elemente-Methode) entstehen grosse Matrizen, die das Verhalten komplexer Systeme modellieren.

Eigenwerte treten bei Stabilitätsanalysen auf: Ein System ist stabil, wenn bestimmte Eigenwerte bestimmte Bedingungen erfüllen (z.B. negativ sind).

Maschinenbau

Im Maschinenbau werden Kräfte und Momente als Vektoren beschrieben. Koordinatentransformationen, etwa bei bewegten Bauteilen, erfolgen über Matrizen:

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad (77)$$

Eigenwerte treten bei der Analyse von Schwingungen und Resonanzen auf, etwa bei Motoren oder Brücken.