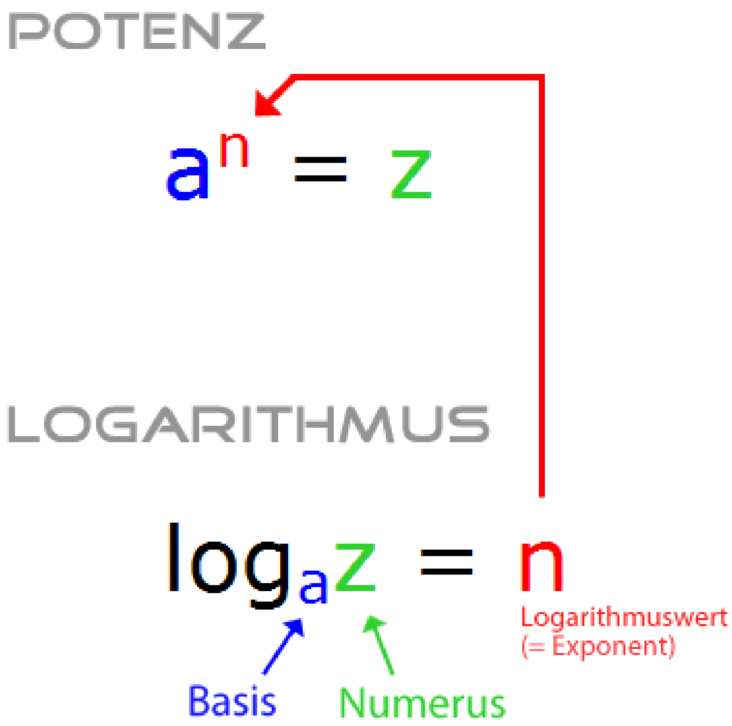
Logarithmen



Rosshan Ravinthrarasa

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Formelverzeichnis

- S.17 | Logarithmus

1 Definition des Logarithmus

Zehnerlogarithmus	$a = 10$	$\log(b) = \lg(b) = \log_{10}(b)$
Logarithmus naturalis	$a = e \approx 2.72$	$\ln(b) = \log_e(b)$
Zweierlogarithmus	$a = 2$	$\mathrm{lb}(b) = \log_2(b)$

Tabelle 1: Definition des Logarithmus

$$\log_a(b) = x$$

Logarithmusbasis
Numerus
Logarithmuswert

1.1 Umformungen

$$a^b = c \iff \log_a(c) = b \iff \sqrt[b]{c} = a$$

2 Logarithmusgesetze

1. Logarithmenregel
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
2. Logarithmenregel
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
3. Logarithmenregel
$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

2.1 Spezialfälle

$$a^{\log_a(b)} = \log_a(a^b) = b$$
$$\log_a(a) = 1$$
$$\log_a(1) = 0$$
$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = \log_a(1) - \log_a(y) = -\log_a(y)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$
$$\log_a(b) = \log_a(c) \Rightarrow b = c$$

2.2 Rechnen mit Logarithmen

Löse die Gleichungen ohne Taschenrechner.

1. a) $2^x = 8$ b) $2^x = 1024$
   c) $3^x = 81$ d) $5^x = 625$
2. a) $5^x = \frac{1}{25}$ b) $4^x = \frac{1}{2}$
   c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 625$
3. a) $2^{2x} = 8$ b) $2^{3x} = 1024$
   c) $3^{4x} = 9$ d) $5^{6x} = 125$

4. a) $2^{2x+1} = 16$ b) $2^{3x-1} = 1024$
   c) $3^{4x+3} = 81$ d) $5^{6x-3} = 625$

5. a) $2^x = 1$ b) $2^x = \frac{1}{2}$
   c) $2^x = \frac{1}{32}$ d) $2^x = 0$

6. a) $2^x = 2^{2x-3}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x} = 2$
   c) $0.1^x = 1000$ d) $5^{2x-1} \cdot 5^{3x+5} = 5^{4x-2}$

7. a) $2^{3x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x} = 8$ b) $2^{3x-4} \cdot 4^{2x-3} = 8^{x+2}$

8. a) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 96$ b) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

9. Löse die Logarithmen mithilfe von den Logarithmengesetze
   a) $\log(bc)$ b) $\log(pqr)$
   c) $\log\left(\frac{b}{c}\right)$ d) $\log\left(\frac{1}{m}\right)$

10. a) $\log\left(\frac{pqr}{st}\right)$ b) $\log\left(\frac{b}{c+d}\right)$

11. a) $\log(m^7)$ b) $\log(b^{-5})$

12. a) $\log\left(\frac{12bd^n}{5cf^r}\right)$ b) $\log[(x-4)^5]$

13. a) $\log(2) + \log(7) - \log(14)$ b) $3 \cdot \log(25) - 2 \cdot \log(125)$
    c) $\log(3) - 2\log(5) + \frac{1}{2}\log(4)$

14. a) $\log(m^2) - \log(m)$ b) $\log(x^3) - 3\log\left(\frac{1}{x}\right)$
    c) $\log\left(\frac{1}{y^3}\right) - \log\left(\frac{1}{y^4}\right)$ d) $\frac{\log(a^5)}{\log(a^4)}$

15. Verwende den Basiswechsel.
    a) $\log_{100}(1000)$ b) $\log_{0.1}(10)$
    c) $\log_2(2)$

16. Vereinfache.
    a) $\log_3(4) \cdot \log_4(5) \cdot \log_5(9)$ b) $\frac{\log_3(13) \cdot \log_5(17)}{\log_3(289) \cdot \log_5(169)}$
    c) $\frac{\log_3(125) \cdot \log_2(\sqrt[3]{3})}{\log_8(5)}$

17. Löse die Logarithmusgleichungen nach x auf. Basiswechsel sind sicher hilfreich.
    a) $\log_4(9) = \log_2(x)$ b) $\log_3(16) = \log_x(256)$
    c) $2^{\log_4(x)} = 7$ d) $\log_4(\log_2(x) - 1) = \log_{16}(9)$

18. a) $\log_3(x-2) = \log_9(x)$ b) $\log_x(7^3) - \log_7(x) = 2$

19. a) $\log_3(x-5) = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{4x-15})$
    b) $\log_{\sqrt{2}}(x) \cdot \log_2(x) \cdot \log_{2\sqrt{2}}(x) \cdot \log_4(x) = 54$

20. Schreibe den Exponenten x als Logarithmus.
    a) $7^x = 5$ b) $p^x = q$
    c) $a^x = \frac{p}{q}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c$

21. Schreibe den Exponenten als Logarithmus.
    a) $2^7 = 128$ b) $11^1 = 11$
    c) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ d) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

22. Schreibe x als Logarithmus.
    a) $3^{2x} = 5$ b) $4^{\frac{x}{2}} = 3$
    c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} = c$ d) $(2 \cdot 3)^{3x} = 36$

23. Notiere die Gleichung als Exponentialgleichung.
    a) $x = \log_u(v)$
    b) $x = \log_2(12)$
    c) $y = \log_{\sqrt{12}}(x)$
    d) $z = \log_c\left(\frac{2}{d}\right)$

24. Berechne ohne Taschenrechner.
    a) $\log_3(81)$
    b) $\log_5(1)$
    c) $\log_7(343)$
    d) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right)$

25. a) $\mathrm{lb}(8)$
    b) $\mathrm{lb}(1024)$
    c) $\mathrm{lb}\left(\frac{1}{2048}\right)$
    d) $\mathrm{lb}(8^{12})$

26. a) $\ln(e^2)$
    b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
    c) $\ln(\sqrt[3]{e^2})$
    d) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right)$

27. a) $\ln(\sqrt{e})$
    b) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$
    c) $\ln\left(\frac{e}{\sqrt[4]{e}}\right)$
    d) $\ln(\ln(e))$

28. a) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9}\right)$
    b) $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{27}{64}\right)$

29. a) $(\log_a(a))^a$
    b) $(\log_a(1))^a$
    c) $(\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right))^0$

30. a) $25^{\log_5(6)}$
    b) $9^{\log_3(\sqrt{5})}$

31. a) $e^{\ln(4)}$
    b) $e^{\frac{3}{2}\ln(4)}$

32. a) $\log_x(64) = 3$
    b) $\log_x(1024) = 10$
    c) $\log_x(8) = -3$
    d) $\log_x\left(\frac{1}{27}\right) = 9$

33. a) $\log_x(1) = 0$
    b) $\log_x(2) = 0$
    c) $\log_x(10'000) = 2$
    d) $\log_x(10) = -\frac{1}{2}$

34. a) $e^{\ln(x)} = x$
    b) $\ln(e^x) = x$
    c) $e^{-\ln(x)} = 3$
    d) $\ln(\ln(x)) = 1$

35. a) $\log(x^2) = 2$
    b) $\log(x^2) = x$
    c) $\log(\log(x^2)) = 1$
    d) $\log(\log(x^2)) = 0$

2.3 Grosse Zahlen

2.3.1 Beispiel

$$\begin{aligned}
x &= 31^{92} \cdot 57^{49} \\
\log_{10}(x) &= \log_{10}(31^{92} \cdot 57^{49}) \\
&= \log_{10}(31^{92}) + \log_{10}(57^{49}) \\
&= 92\log_{10}(31) + 49\log_{10}(57) \\
\log_{10}(x) &= 223.2431438 \\
x &= 10^{223.2431438} = 10^{223+0.2431438} \\
&= 10^{0.2431438} \cdot 10^{223} \\
&= \underline{\underline{1.75042022 \cdot 10^{223}}}
\end{aligned}$$

x hat 224 Stellen und beginnt mit der Ziffer 1.

2.3.2 Aufgaben

1. Was ist grösser?
   a) 2^{2000} oder 3^{630} b) 0.9^{3000} oder 0.8^{1500}
2. Wie viele Stellen besitzt die im Zehnersystem geschriebene ausgerechnete Potenz? a) 2^{2000}
   b) 2021^{2021}
   c) $(9^9)^9$ d) 7^{7^7}
3. Von dem im Zehnersystem geschriebenen ausgerechneten Wert sind die erste Ziffer und die Anzahl der Ziffern anzugeben.
   a) 837^{837} b) 6^{7^8}
   c) $1003^{35} \cdot 1004^{34} \cdot 1008^{32}$

3 Exponential- und Logarithmusgleichungen

3.1 Beispiele

1. Exponential- / Logarithmusgleichung

$$
\begin{aligned}
y = c \cdot a^n 50'000 &= 100 \cdot 1.12^x \\
500 &= 1.12^x \\
\log_{1.12} 500 &= x \\
x &= \underline{\underline{54.84}}
\end{aligned}
$$

Konstante, Wachstums- / Zerfallsfaktor

2. Um wie viel Prozent nimmt die Algenmenge in einem See pro Jahr zu, wenn sie innert 12 Jahren von 200 Tonnen auf 400 Tonnen angewachsen ist? (t in J)

$$
\begin{aligned}
A(t) &= A(0) \cdot a^t \\
400 &= 200 \cdot a^{12} \\
2 &= a^{12} \\
\sqrt[12]{2} &= a \\
&\approx 1.05946 \Rightarrow (1.05946 - 1) \cdot 100 \\
&= \underline{\underline{5.95\% \text{ Zuwachs}}}
\end{aligned}
$$

Startfaktor, Wachstums- / Zerfallsfaktor

3. Bei einer bestimmten radioaktiven Substanz verringert sich die Zahl der Kerne pro Tag um 9.71% durch radioaktiven Zerfall. Heute besitzt ein Kernforschungszentrum 2.6g dieser Substanz. Wie viel besass es vor 30 Tagen? (t in d)

$$
\begin{aligned}
A(t) &= A(0) \cdot a^t \\
A(-30) &= 2.6 \cdot 0.9029^{-30} \\
&= \underline{\underline{55.69g}}
\end{aligned}
$$

Startfaktor, Wachstums- / Zerfallsfaktor

3.2 Aufgaben

1. Ein Biologie beobachtet, dass die Grösse der Fläche, die eine Zellkultur auf einer Nährlösung einnimmt, sich in der Stunde um ca. 45% vergrössert.
   Berechne den Inhalt der Fläche nach 1, 2, 3, 4, 5, n Stunden, wenn sie zu Beginn der Beobachtungen $1000mm^2$ eingenommen hat! (der Nährboden sei Unbeschränkt).

2. Berechne aus $A(n) = A(0) \cdot 1.45^n$, um welchen Prozentsatz der Flächeninhalt in der ersten halben Stunde zunimmt ($A(0) = 1000$)!

3. Zeige, dass in jeder weiteren halben Stunde der Inhalt der Fläche um einen stets gleichen Prozentsatz wächst.

4. Die Anzahl der Bakterien in einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion N mit $N(t) = 200 \cdot 1.7^t$ beschrieben (t für Stunden).
   Berechne die Anzahl der Bakterien nach 1, 2, 5, 10 Stunden!

5. Koffein wird im Blut mit einer Rate von 15% pro Stunde abgebaut. Berechne auf ein Zehntelmilligramm genau, wie viel Koffein von anfangs 40 Milligramm nach einer (sechs) Stunde(n) noch im Blut vorhanden ist.

6. Bei radioaktiven Stoffen wird oft die Halbwertszeit angegeben, dass ist jene Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Menge zerfällt. Das radioaktive Isotop Barium_{140} hat eine Halbwertszeit von 13 Tagen.

   a) Stelle das Zerfallsgesetz auf

   b) Wie viele Prozent der ursprünglich vorhandenen Menge sind nach 2 Tagen noch vorhanden?

   c) Wenn zu Beginn der Beobachtung 3.2 mg vorhanden sind, wieviele mg zerfallen am ersten Tag?

   d) Wieviele mg zerfallen am 14. Tag?

7. In einer radioaktiven Substanz zerfallen gewisse Atomkerne durch Aussenden von radioaktiver Strahlung in Atomkerne, die nicht mehr radioaktiv strahlen. Mit der Zeit werden immer weniger Atomkerne radioaktive Strahlung aussenden. Für eine bestimmte radioaktive Probe gilt: Am Anfang sind 10^{20} radioaktive Kerne vorhanden. Nach jeder halben Stunde halbiert sich die Anzahl radioaktiver Kerne; die Anzahl radioaktiver Atomkerne verringert sich kontinuierlich und nimmt in der gleichen Zeitspanne um den gleichen Faktor ab.

   a) Wie viele radioaktive Kerne sind nach 1, 2, 3, 4, 5, . . . , n Stunden vorhanden?

   b) Drücke die Anzahl $K(n)$ der radioaktiven Kerne nach n Stunden durch die Anzahl der radioaktiven Kerne nach $(n-1)$ Stunden aus.

   c) Drücke die Anzahl $R(t)$ der radioaktiven Kerne nach t Minuten durch die Anzahl der radioaktiven Kerne nach $(t-1)$ Stunden aus.

   d) Wie viele radioaktive Kerne sind nach 40 Minuten vorhanden?

4 Lösung

Rechnen mit Logarithmen

1. a) $x = 3$ b) $x = 10$ c) $x = 4$ d) $x = 4$
2. a) $x = -2$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = 7$ d) $x = 4$
3. a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = \frac{10}{3}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{2}$
4. a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{1}{4}$ d) $x = \frac{7}{6}$
5. a) $x = 0$ b) $x = -1$ c) $x = -5$ d) unlösbar
6. a) $x = 3$ b) $x = \frac{5}{3}$ c) $x = -3$ d) $x = -6$
7. a) $x = 1$ b) $x = 4$
8. a) $x = 4$ b) $x = 3$
9. a) $\log(b) + \log(c)$ b) $\log(p) + \log(q) + \log(r)$ c) $\log(b) - \log(c)$ d) $-\log(m)$
10. a) $\log(p) + \log(q) + \log(r) - \log(s) - \log(t)$ b) $\log(b) - \log(c + d)$
11. a) $7\log(m)$ b) $-5\log(b)$
12. a) $\log(12) + \log(q) + \log(r) - \log(s) - \log(t)$ b) $5\log(x - 4)$
13. a) 0 b) 0 c) $\log\left(\frac{6}{25}\right)$
14. a) $\log(m)$ b) $\log(x^6)$ c) $\log(y)$ d) $\frac{5}{4}$
15. a) $\frac{3}{2}$ b) -1 c) 1
16. a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) 3
17. a) $x = 3$ b) $x = 9$ c) $x = 49$ d) $x = 16$
18. a) $x = 4$ b) $x = 7$; $x = \frac{1}{34}$
19. a) $x = \frac{10}{3}$ b) $x = \frac{1}{8}$; $x = 8$
20. a) $x = \log_7(5)$ b) $x = \log_p(q)$ c) $x = \log_a\left(\frac{p}{q}\right)$ d) $x = \log_{\frac{a}{b}}(c)$
21. a) $7 = \log_2(128)$ b) $1 = \log_{11}(11)$ c) $-2 = \log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ d) $\frac{1}{2} = \log_z(\sqrt{7})$
22. a) $x = \log_9(5)$ b) $x = \log_2(3)$ c) $x = \log_{\left(\frac{a}{b}\right)^2}(c)$ d) $x = \log_{6^3}(6^2) = \frac{2}{3}$
23. a) $u^x = v$ b) $2^x = 12$ c) $\sqrt{2}^y = x$ d) $c^z = \frac{2}{d}$
24. a) 4 b) 0 c) 3 d) -3
25. a) 3 b) 10 c) -2 d) -3
26. a) 2 b) -1 c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{2}$
27. a) $\frac{1}{2}$ b) -3 c) $\frac{3}{4}$ d) 0
28. a) -4 b) 3
29. a) 1 b) 0 c) 1

30. a) 36 b) 5

31. a) 4 b) 8

32. a) $x = 4$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

33. a) $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ b) $\{\}$ c) 100 d) $\frac{1}{100}$

34. a) $\mathbb{R}^+$ b) $\mathbb{R}$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = e^e$

35. a) $x = \pm 10$ b) $x = \pm\frac{1}{10}$ c) $x = \pm 10^5$ d) $x = \pm\sqrt{10}$

Grosse Zahlen

1. a) $2^{2000} > 3^{630}$ b) $0.9^{3000} > 0.8^{1500}$
2. a) 603 b) 6681 c) 78 d) $695'975$
3. a) Erste Ziffer: 2
   Anzahl Stellen: 2447
   b) Erste Ziffer: 1
   Anzahl Stellen: 4'485'888
   c) Erste Ziffer: 1
   Anzahl Stellen: 304

Exponential- und Logarithmusgleichungen

1. $A(n)$ in mm^2

$$\begin{aligned} A(1) &= 1450mm^2 \\ A(2) &= 2100mm^2 \\ A(3) &= 3000mm^2 \\ A(4) &= 4400mm^2 \\ A(5) &= 6400mm^2 \\ A(n) &= 1000 \cdot 1.45^n \end{aligned}$$

2. 20.4%
3. Herleitung:

$$\begin{aligned} A(t) &= 1000 \cdot 1.45^t \\ A\left(t + \frac{1}{2}\right) &= 1000 \cdot 1.45^{t+\frac{1}{2}} = \underbrace{1000 \cdot 1.45^t}_{A(t)} \cdot 1.45^{\frac{1}{2}} \\ &= A(t) \cdot 1.45^{\frac{1}{2}} = A(t) - 1.2041 \end{aligned}$$

4. Anzahl in h

$$\begin{aligned} 1h &= 340 \\ 2h &= 578 \\ 5h &= 2839 \\ 10h &= 40'319 \end{aligned}$$

5.
   - Berechnung des Wachstumsfaktor a: Der Faktor a ist kleiner als 1, da das Koffein abgebaut wird, d.h. die Koffeinmenge im Blut nimmt ab.

$$100\% - 15\% = 85\% \text{ oder } 0.85$$

   - Formel zur Berechnung der Koffeinmenge:

$$\begin{aligned} f(t) &= 40 \cdot 0.85^t \\ f(1) &= 34\ mg \\ f(6) &= 15.086\ mg \end{aligned}$$

6. a) $N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{13}}$
   b) $N(2) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{13}} \approx 89.885\%$
   c) $N(0) - N(1) = 0.166mg$

d) $N(13) - N(14) = 0.083mg$

7. In einer radioaktiven Substanz zerfallen gewisse Atomkerne durch Aussenden von radioaktiver Strahlung in Atomkerne, die nicht mehr radioaktiv strahlen. Mit der Zeit werden immer weniger Atomkerne radioaktive Strahlung aussenden. Für eine bestimmte radioaktive Probe gilt: Am Anfang sind 10^{20} radioaktive Kerne vorhanden. Nach jeder halben Stunde halbiert sich die Anzahl radioaktiver Kerne; die Anzahl radioaktiver Atomkerne verringert sich kontinuierlich und nimmt in der gleichen Zeitspanne um den gleichen Faktor ab.

   a) $A(n)$ in h

$$A(1) = 2.5 \cdot 10^{19}$$
$$A(2) = 6.25 \cdot 10^{18}$$
$$A(3) = 1.56 \cdot 10^{18}$$
$$A(4) = 3.91 \cdot 10^{17}$$
$$A(5) = 9.77 \cdot 10^{16}$$
$$A(n) = 10^{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

   b) $K(n) = K(n-1) \cdot \frac{1}{4}$

   c) $R(t) = R(t-1) \cdot 0.98$

   d) $A\left(\frac{2}{3}\right) = 10^{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 3.97 \cdot 10^{19}$