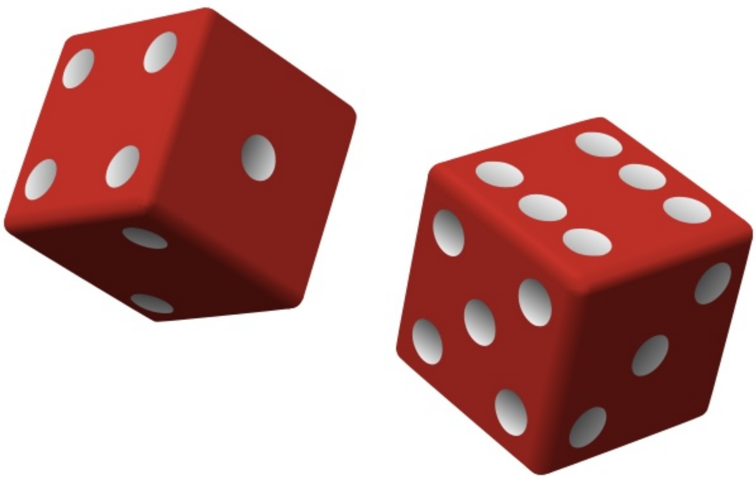
Stochastik - Einführung



Rosshan Ravinthrarasa

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Formelverzeichnis

- S.42 | Fakultäten
- S.42 | Binomialkoeffizienten
- S.44f | Kombinatorik
- S.119 | Bedingte Wahrscheinlichkeit
- S.119 | Pfadregeln
- S.119 | Satz von Bayes
- S.119f | Zufallsvariablen
- S.120 | Erwartungswert
- S.121 | Binomialverteilung

Aufgabenverzeichnis

- Kapitel „Kombinatorik“ (1)
  Buch: *Stochastik*; S.57ff, 1 - 24ab, 27 - 32, 34 - 38, 40
- Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (2)
  Buch: *Stochastik*; S.37ff, 1 - 14, 17 - 23, 25, 28, 29
  S.71ff, 1 - 15, 17 - 19
  S.85ff, 1 - 14, 17 - 25
  S.102ff, 1 - 15
  S.118ff, 1 - 22

1 Kombinatorik

1.1 Begriffe der Kombinatorik

Binomialkoeffizient

Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird als „n tief k“ gelesen und heisst Binomialkoeffizient. n steht für die Grösse der Menge, aus der gewählt wird und k steht für die Anzahl der Auswahlen / Ziehungen / Plätze. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt Antwort auf zwei unterschiedliche Fragen:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen k auszuwählen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen $n-k$ Elemente *nicht auszuwählen*?

Daraus folgt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dies kann durch Ausschreiben der Binomialkoeffizienten auch rechnerisch bestätigt werden.

Fakultät

Das Symbol $n!$ (gelesen „n-Fakultät“) ist eine Abkürzung für das Produkt aller natürlichen Zahlen von n an absteigend bis 1.
Zusätzlich wird festgelegt: $1! = 1$ und $0! = 1$.

1.2 Multiplikationsprinzip ⇒ Kombination, Variation, Permutation

Bei einer *Permutation* werden alle n Elemente der Grundmenge ausgewählt ($n = k$) und in eine Reihenfolge gebracht. Bei einer *Variation* wird die Reihenfolge der k ausgewählte Elemente berücksichtigt, bei einer *Kombination* hingegen nicht.

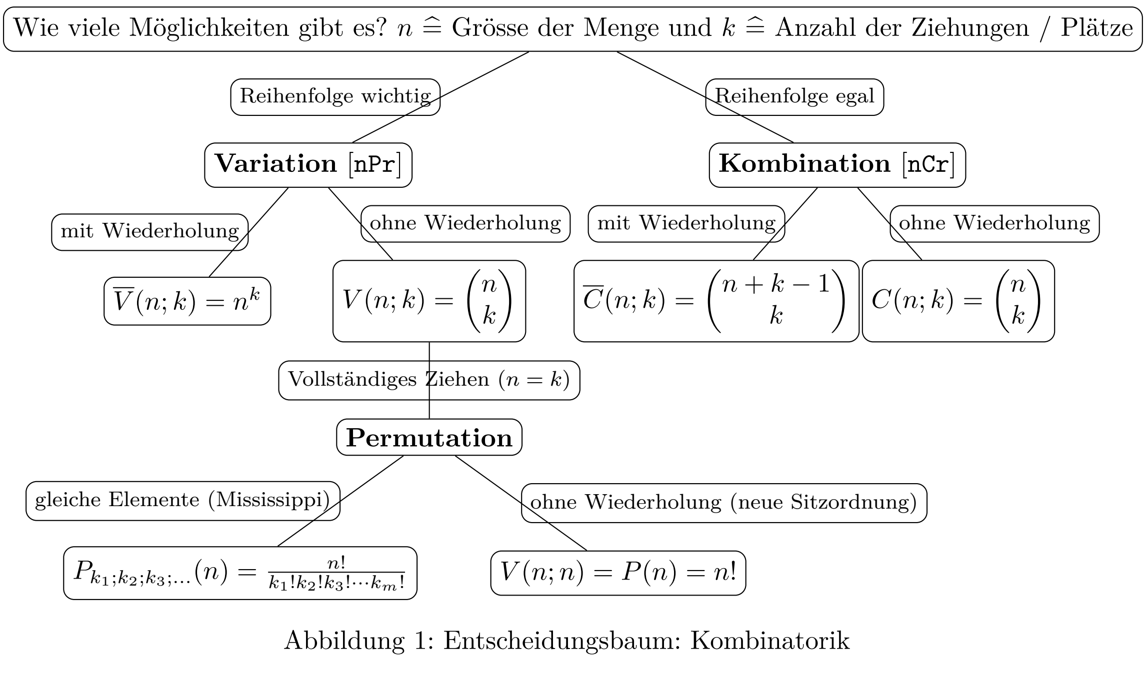


Abbildung 1: Entscheidungsbaum: Kombinatorik

Beispiele:

1. Ein Zahlenschloss hat 4 Stellen. Jede Stelle kann die Ziffern 0–9 annehmen. Wie viele verschiedene Codes gibt es?
   Analyse:
   - mögliche Ziffern: $n = 10$
   - Stellen: $k = 4$
   - Reihenfolge wichtig
   - Wiederholung erlaubt

   Lösung: $\overline{V}(10; 4) = 10^4 = 10'000$

2. Aus 6 verschiedenen Personen werden 3 für ein Podest (1., 2., 3.) ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
   Analyse:
   - Personen: $n = 6$
   - Plätze: $k = 3$
   - Reihenfolge wichtig
   - keine Wiederholung

   Lösung: $V(6; 3) = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 verschiedene Bücher in ein Regal zu stellen?
   Analyse:
   - alle Elemente werden benutzt
   - Reihenfolge wichtig
   - $n = k = 5$

   Lösung: $P(5) = 5! = 120$

4. Aus 10 Schülern werden 3 für eine Gruppe ausgewählt. Die Reihenfolge ist egal.
   Analyse:
   - Schüler: $n = 10$
   - Auswahl: $k = 3$
   - Reihenfolge egal
   - keine Wiederholung

   Lösung: $C(10; 3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$

5. Es gibt 3 Eissorten (Vanille, Schoko, Erdbeer). Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Kugeln zu wählen? (Sorten dürfen mehrfach gewählt werden, Reihenfolge egal.)
   Analyse:
   - Sorten: $n = 3$
   - Kugeln: $k = 4$
   - Wiederholung erlaubt
   - Reihenfolge egal

   Lösung: $\overline{C}(3; 4) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird mit $P(E)$ bezeichnet (P vom lateinischen Wort „probabilitas“, dt. Wahrscheinlichkeit). Für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $\{s\}$ wird $p(s)$ verwendet anstelle von $P(\{s\})$.

Wertebereich von Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines beliebigen Ereignisses E liegt zwischen 0 und 1:

$$0 \leq P(E) \leq 1 \qquad \text{für jedes Ereignis } E$$

2.1 Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ergebnisraum S: Der Ergebnisraum enthält alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Beispiel Würfel: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Ergebnis s: Ein Ergebnis beschreibt ein einzelnes mögliches Resultat eines Zufallsexperiments.

$$s \in S$$

Beispiel Würfel: $s = \{4\}$

Ereignis E: Ein Ereignis tritt ein, wenn die bestimmten Ergebnisse des Experiments, die im Ergebnisraum sind, auftreten.

$$E \subseteq S \qquad \text{und} \qquad s \in E$$

Beispiel Würfel: $E = \{2; 4; 6\}$

Besondere Ereignisse:

- Elementarereignis: Ein Elementarereignis ist ein Ereignis, das genau aus einem einzelnen Ergebnis besteht.

  $$E = s_i$$

  Beispiel Würfel: „Augenzahl 4“

- Gegenereignis: Das Gegenereignis $\overline{E}$ zu einem Ereignis E enthält alle Ergebnisse, die nicht zu E gehören. Additionsregel: $P(E) + P(\overline{E}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

  $$\overline{E} = S \setminus E$$

  Beispiel Würfel: bei $E = \{4\}$ ist $\overline{E} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

- Sicheres Ereignis: Das Ereignis, das alle Ergebnisse enthält, also der gesamte Ergebnisraum.

  $$E = S$$

  Beispiel Würfel: E = { 1; 2; 3; 4; 5; 6 }

- Unmögliches Ereignis: Das Gegenereignis zum sicheren Ereignis, also die leere Menge $\varnothing$.

  $$E = \varnothing$$

  Beispiel Würfel: „Augenzahl 7“

- Disjunkte Ereignisse: Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heissen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Ergebnisse haben:

  $$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

  Beispiel Würfel: $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, wenn $E_1 = \{1; 2; 3\}$ und $E_2 = \{4; 5; 6\}$

2.2 n-stufige Zufallsversuche bei $n \in \mathbb{N}$

Wird ein Zufallsversuch mehrmals durchgeführt, so nennt man die Anzahl Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist, die *absolute Häufigkeit* von E.
Die *relative Häufigkeit* eines Ereignisses E ist definiert als die Anzahl Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist, dividiert durch die Gesamtzahl aller Durchführungen des Versuchs.

Baumdiagramm und deren Pfadregeln

Werden bei einem Knoten alle Wahrscheinlichkeiten der abgehenden Kanten addiert, so ist die Summe 1 oder 100% (sicheres Ereignis).
Jeder Pfad beschreibt ein mögliches Elementarereignis des mehrstufigen Zufallsexperimentes.

1. Pfadregel Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Elementarereignis eintritt, werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des entsprechenden Pfades miteinander multipliziert.

2. Pfadregel Gehören zu einem Ergebnis mehrere Pfade, so werden die dazugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten addiert.

Begriffe der n-stufigen Zufallsversuche

Ergebnisraum S
Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch enthält der Ergebnisraum S alle möglichen Kombinationen der Einzelergebnisse. Beispiel Würfel:

$$S = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}, \qquad |S| = 36$$

Elementarereignis E
Ein Elementarereignis besteht aus genau *einem* möglichen Ergebnis des mehrstufigen Zufallsversuchs. Beispiel Würfel:

$$E = \{(2,5)\}$$

„Beim ersten Wurf fällt eine 2, beim zweiten eine 5."

Ereignis E
Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraums:

$$E \subseteq S$$

Beispiel Würfel:

$$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

„Die Summe der beiden Würfe ist 7."

Gegenereignis $\overline{E}$
Das Gegenereignis enthält alle Ergebnisse, die nicht zum Ereignis E gehören:

$$\overline{E} = S \setminus E$$

Beispiel Würfel:

$$\overline{E} = \{(i,j) \in S \mid i + j \neq 7\}$$

„Die Summe der beiden Würfe ist nicht 7."
Es gilt stets:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

2.3 Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis s_i eines Zufallsversuchs eine Zahl zu. Die möglichen Werte von X werden mit x_1, x_2, x_3, …, x_n bezeichnet.

Beispiel Würfel: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$X(s) = \begin{cases} 1 & \text{falls gerade} \\ 0 & \text{falls ungerade} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} X(1) &= 0 \\ X(2) &= 1 \\ X(3) &= 0 \\ X(4) &= 1 \\ X(5) &= 0 \\ X(6) &= 1 \end{aligned}$$

Also: $P(X = 1) = P(\text{gerade})$ oder allgemein: $P(X = x_k) = P(\{s \in S \mid X(s) = x_k\})$
In der Tabelle:

	j_1	j_2
x_k	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Für $p_k = P(X = x_k)$ mit x_1, x_2, …, x_n gilt:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung (bei Zufallsvariablen)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X zeigt, wie die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf die möglichen Werte x_1, x_2, …, x_n von X verteilt ist. Das basiert formal auf Folgendem:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Jeder Wert x_k wird dabei mit seiner Wahrscheinlichkeit $p_k = P(X = x_k)$ angegeben.

Grafisch lässt sich die Verteilung oft mit einem Stabdiagramm darstellen, wobei die Höhe jedes Stabs die Wahrscheinlichkeit p_k des jeweiligen Werts x_k zeigt.

Gleichverteilung (Laplace-Ansatz)

Der Laplace-Ansatz legt die Wahrscheinlichkeiten für einen Ergebnisraum, der aus n möglichen Ergebnissen besteht, wie folgt fest:

- Jedes Ergebnis s hat Wahrscheinlichkeit $p(s) = \frac{1}{n}$.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist gleich der Anzahl Ergebnisse in E dividiert durch n:
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Kurz: „Anzahl günstige dividiert durch Anzahl mögliche Ergebnisse.“

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung zählt, wie oft ein Ereignis in gleichartigen, unabhängigen Versuchen auftritt. Mit der folgenden Formel kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel Würfel:
Ein fairer Würfel wird 5-mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Sechsen zu würfeln?
Es gilt:

- Anzahl Versuche: $n = 5$
- Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{6}$
- Zufallsvariable: $X \mathrel{\widehat{=}}$ Anzahl der geworfenen Sechsen

Daraus folgt:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.161 \Rightarrow 16.1\%$$

Eigenschaften der Binomialverteilung:

- Die Binomialwahrscheinlichkeiten sind vor allem für Werte von k in der Nähe des Erwartungswerts np gross. Sie gehen rasch gegen Null, wenn k sich von np entfernt und n gross ist.
- Wenn n gross und p nicht sehr nahe bei 0 oder 1 ist, sind die Binomialwahrscheinlichkeiten annähernd symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse bei $k = np$, und die oberen Enden der Stäbe liegen auf einer glockenförmigen Kurve.
- Bei festem p nimmt die Breite dieser Glockenkurve mit wachsendem n langsam zu.
- Für festes n und variables p ist die Glockenkurve am breitesten für $p = \frac{1}{2}$.

Ereignis	**Wahrscheinlichkeit**
Höchste x Erfolge	$P(X \leq x) = \sum_{x=0}^{x} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
Weniger als x Erfolge	$P(X < x) = \sum_{x=0}^{x-1} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
Mindestens k Erfolge	$P(X \geq k) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
Mehr als k Erfolge	$P(X > k) = \sum_{x=k+1}^{n} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
Mindestens x_L und höchstens x_R Erfolge	$P(x_L \leq X \leq x_R) = \sum_{x=x_L}^{x_R} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeit bei ungenauer Anzahl Erfolgen

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X ist der durchschnittliche Wert, den X langfristig annimmt, wenn man den Zufallsversuch sehr oft wiederholt.
Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable X ist definiert als

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_{n-1}p_{n-1} + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k$$

Dabei entsprechen p_1, p_2, $\ldots$, p_{n-1}, p_n den Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Zufallsvariable X ihre möglichen Werte x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1} und x_n annimmt.

Erwartungswert der Binomialverteilung:
Eine binomial(n, p)-verteilte Zufallsgrösse & hat den Erwartungswert $E(X) = np$.

Beispiel Würfel: Erwartungswert eines fairen Würfels.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

„faires“ Spiele

Ein faires Spiel ist ein Zufallsspiel, bei dem der langfristige durchschnittliche Gewinn oder Verlust null beträgt, also weder die eine noch die andere Partei einen Vorteil hat.

$$E(X) \begin{cases} < 0, & \text{Spiel zugunsten des Hauses} \\ = 0, & \text{faires Spiel} \\ > 0, & \text{Spiel zugunsten des Spielers} \end{cases}$$

Beispiel Würfel:
Spielregel: Gerade Zahl $\widehat{=}$ Gewinn (1 CHF) und ungerade Zahl $\widehat{=}$ Verlust (-1 CHF), daraus folgt...

$$X = \begin{cases} 1, & \text{gerade Zahl} \\ -1, & \text{ungerade Zahl} \end{cases}$$

Also:

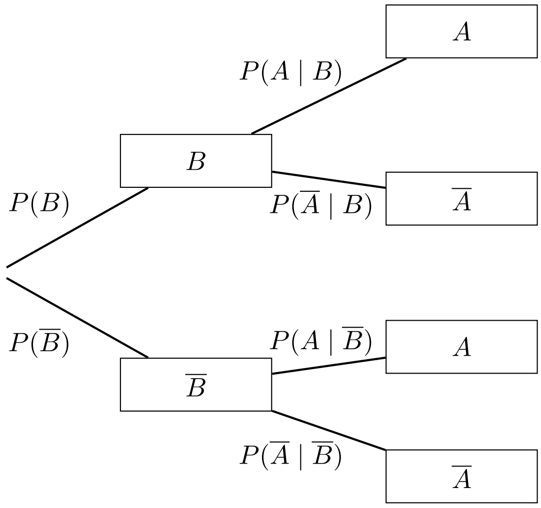
$$P(X = 1) = \frac{3}{6} = 0.5$$
$$P(X = -1) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Daraus folgt:

$$E(X) = 1 \cdot 0.5 + (-1) \cdot 0.5 = 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{faires Spiel}$$

2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wird als $P(A|B)$ notiert. Sie ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn bekannt ist, dass B eingetreten ist.



Wenn $P(A|B)$ und $P(B)$ bekannt sind, zum Beispiel in einem Baumdiagramm, dann berechnet sich $P(A \cap B)$ gemäss der Multiplikationsregel:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Umgekehrt geht auch (bei $P(B) > 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \mathrel{\widehat{=}} \text{Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit}$$

Für den Fall $P(B) = 0$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht definiert. Die Einzelwahrscheinlichkeiten wären dementsprechend:

$$P(\{s\}|B) = p(s|B) = \begin{cases} \frac{p(s)}{P(B)} & \text{falls } s \in B \\ 0 & \text{falls } s \notin B \end{cases}$$

Satz von Bayes

Der Satz von Bayes erlaubt es, bedingte Wahrscheinlichkeiten umzudrehen: Aus $P(A|B)$ lässt sich $P(B|A)$ berechnen, wenn die Randwahrscheinlichkeiten ($P(A)$ bzw. $P(B)$) bekannt sind. Er kann sowohl zweistufig als auch allgemein genutzt werden.

$$\text{zweistufig} \quad P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}$$

$$\text{allgemein} \quad P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

Abhängige und unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B mit P(A) $>$ 0 und P(B) $>$ 0 heissen unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses das Eintreten des anderen nicht beeinflusst. Das bedeutet formal, dass eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $P(A|B) = P(A) \mathrel{\widehat{=}}$ Die Wahrscheinlichkeit von A ändert sich nicht, wenn B eintritt.
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \mathrel{\widehat{=}}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, ist das Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten.
3. $P(B|A) = P(B) \mathrel{\widehat{=}}$ Die Wahrscheinlichkeit von B bleibt gleich, unabhängig davon, ob A eintritt (symmetrisch).
4. $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, falls $P(B) < 1 \mathrel{\widehat{=}}$ Tritt gleich wahrscheinlich ein, egal ob B eintritt oder nicht.

Abhängigkeit bedeutet, dass das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des anderen verändert: $P(A|B) \neq P(A)$ oder $P(B|A) \neq P(B)$.