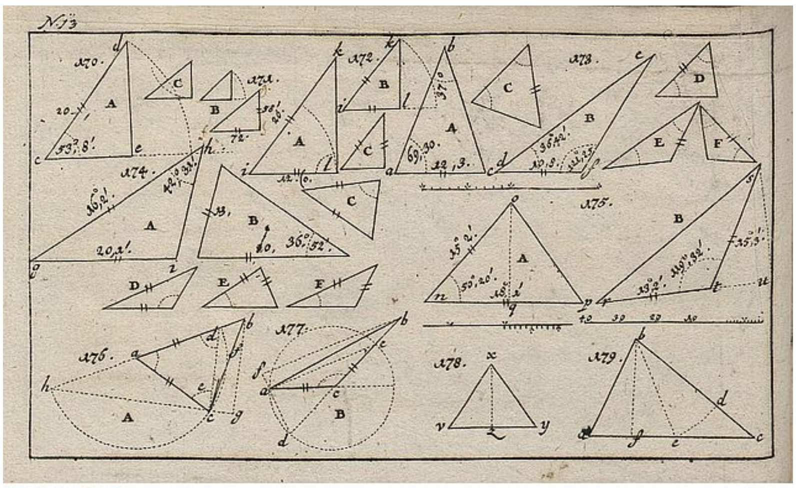
Trigonometrie



Quelle: Deutsche Fotothek

Rosshan Ravinthrarasa

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Formelverzeichnis

- S.58f | Trigonometrische und Arcusfunktionen (vgl. S.98)
- S.97 | Trigonometrie im rechtwinklingen Dreieck
- S.97 | Trigonometrische Formeln

1 Definition der trigonometrischen Funktionen

$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\text{Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$$
$$\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi)$$

1.1 Bezeichnung am rechtwinkligen Dreieck

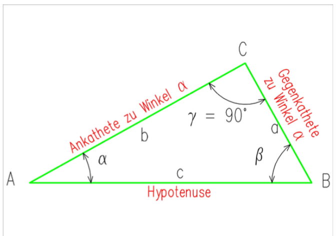


Abbildung 1: Bezeichnung am rechtwinkligen Dreieck

2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Beispiele

1. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) mit $a = 3\ cm$ und $\beta = 50°$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

$$\begin{aligned}
\alpha &: \ \alpha = 180° - 90° - 50° = \underline{\underline{40°}} \\
b &: \ \tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 3\tan(50°) = \underline{\underline{3.58cm}} \\
c &: \ \cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{\cos(50°)} = \underline{\underline{4.67cm}}
\end{aligned}$$

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) kennt man $a = 7.2\ cm$ und $b = 4.8\ cm$. Berechne c, α und β!

$$\begin{aligned}
c &: \ a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7.2^2 + 4.8^2} = \underline{\underline{8.65cm}} \\
\alpha &: \ \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow \arctan\left(\frac{7.2}{4.8}\right) = \underline{\underline{56.31°}} \\
\beta &: \ \tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{4.8}{7.2}\right) = \underline{\underline{33.69°}}
\end{aligned}$$

3. Von einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) kennt man $a = 8$, $\alpha = 34.17°$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel!

$$\begin{aligned}
\beta &: \ \beta = 180° - 90° - 34.17° = \underline{\underline{55.83°}} \\
c &: \ \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{8}{\sin(34.17°} = \underline{\underline{14.24}} \\
b &: \ \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{8}{\tan(34.17°} = \underline{\underline{11.78}}
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Berechne im rechtwinkligen Dreieck mit dem rechten Winkel bei C die fehlenden Seiten und Winkel.
   a) $a = 20$, $b = 21$
   b) $a = 88$, $c = 137$
   c) $a = 12$, $\alpha = 40°$
   d) $c = 32.7$, $\beta = 47.3°$

2. Im rechtwinkligen Dreieck mit rechtem Winkel bei C sind gegeben:
   a) $a = 24$, $c = 74$, berechne die Länge der Winkelhalbierenden von w_α und w_β.
   b) $h_c = 25$, $w_\gamma = 32$, berechne a und b.
   c) $a = 15$, $w_\beta = 17$, berechne die Seitenhalbierende s_a.
   d) $b = 83$, $w_\alpha = 20$, gesucht ist w_β.
   e) $\alpha = 36°$, $w_\alpha = 20$, gesucht ist w_β.
   f) $c = 39$, $\beta = 52°$, berechne h_c.

3. Ein rechtwinkliges Dreieck ist durch die Kathete $b = 65$ und die Hypotenuse $c = 97$ gegeben. Wie lang ist die Halbierende des kleinsten Innenwinkels?

4. Wie gross sind die Innenwinkel eines Rhombus mit den Diagonalen $e = 57.2$ und $f = 81.7$?

5. Wie lange sind die Diagonalen eines Rhombus, von dem ein Innenwinkel von $61°$ und der Flächeninhalt $A = 28$ bekannt sind?

6. Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist durch die parallelen Seiten $a = 45$ und $c = 33$ sowie die Diagonale $e = 89$. Wie gross sind die Basiswinkel?

7. Berechne (und runde zweckmässig)

   a) die Höhe eines Turms, wenn man seine Spitze unter einem (Höhen-)Winkel von 23° erblickt und der (Horizontal-)Abstand zum Turm $478m$ beträgt. Das Auge des Betrachters liegt dabei $1.6m$ höher als der Fusspunkt des Turms.

   b) die Horizontaldistanz zum Dorfzentrum, wenn man von einem hohen Aussichtspunkt (1133 m.ü.M.) mit einem Winkel von 72° gegenüber der Vertikalen zum Dorfzentrum (694 m.ü.M.) hinunterschaut.

   c) die Luftdistanz zu einer Bergspitze, wenn sich ein Wanderer auf $1291m$ Höhe befindet, der Höhenwinkel des Sehstrahl 4.5° beträgt und der Berg in der Landkarte mit 2011 m.ü.M. angegeben ist. (Die Grösse des Wanderers kann hier vernachlässigt werden).

Lösungen

1. a) $c = 29$, $\alpha = 43.6°$, $\beta = 46.4°$ b) $b = 105$, $\alpha = 39.97°$, $\beta = 50.03°$
   c) $b = 14.3$, $c = 18.67$, $\beta = 50°$ d) $a = 22.18$, $b = 24.03$, $\alpha = 42.7°$

2. a) $w_\alpha = 70.97$, $w_\beta = 29.49$ b) 225.15 bzw. 25.16
   c) 23.58 d) 219.69
   e) 15.51 f) 18.92

3. a) $w_\beta = 77.14$ b) 110.01° bzw. 69.99°
   c) 9.75 bzw. 5.74 d) 85.71°

4. a) $204.5m$ b) $1352m$ c) 9177

5. 145.5°, 7.5°

6. 141.35°

7. a) 17.4° b) $41'774km$ c) 42.5%

3 Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Cosinussatz:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

Trigonometrische Flächenformel:

$$A = \frac{ab}{2} \cdot sin(\gamma) = \frac{ac}{2} \cdot sin(\beta) = \frac{bc}{2} \cdot sin(\alpha)$$

3.1 Beispiele

1. $a = 4.5$, $b = 6.0$, $\alpha = 47°$; berechne die fehlenden Teile!

$$\begin{aligned} \beta \ : \frac{\sin(\beta)}{b} &= \frac{\sin(\alpha)}{a} \\ \sin(\beta) &= \frac{\sin(\alpha) \cdot b}{a} \\ \beta_1 &= \arcsin\left(\frac{\sin(47° \ \cdot b}{4.5}\right) = \underline{\underline{77.2°}} \\ \beta_2 &= 180° - \beta_1 = \underline{\underline{102.8°}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \ : \gamma_1 &= 180° - \alpha - \beta_1 = \underline{\underline{55.8°}} \\ 180° - \alpha - \ \beta_2 &= \underline{\underline{30.2°}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \ : \ \frac{c}{\sin(\gamma)} &= \frac{a}{\sin(\alpha)} \\ c_1 &= \frac{a \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} = \underline{\underline{5.09}} \\ c_2 &= \frac{a \cdot \sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)} = \underline{\underline{3.09}} \end{aligned}$$

2. Von einem Dreieck kennt man $b = 5$, $c = 4$ und $\alpha = 60°$. Berechne a.

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \ \cdot 4 \cdot \cos(60°) = 21 \\ a &= \underline{\underline{\sqrt{21}}} \end{aligned}$$

3. Von einem Dreieck kennt man $a = 7$, $b = 9$, $\gamma = 29°$. Berechne die Seiten und Winkel.

$$c\ :\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = \underline{\underline{4.45}}$$

$$\begin{aligned} \beta\ :\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ \cos(\beta) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \underline{\underline{101.30°}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\ :\ \frac{\sin(\alpha)}{a} &= \frac{\sin(\gamma)}{c} \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) = \underline{\underline{49.70°}} \end{aligned}$$

4. Um die Entfernung zweier Punkt A, B von einem unzugänglichen Punkt P zu ermitteln („Vorwärtseinschneiden“), misst man $\overline{AB} = 265.7m$, sowie $\angle PAB = \alpha = 56.3°$ und $\angle ABP = \beta = 72.7°$. Bestimme die Länge von $\overline{AP}$.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\sin(\beta)} &= \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \\ \overline{AP} &= \frac{265.7 \cdot \sin(72.7°)}{\sin(51°)} = \underline{\underline{326.425m}} \end{aligned}$$

5. Beim „Rückwärtseinschneiden“ soll die Entfernung zweier Punkte P und Q ermittelt werden, zwischen denen in Hindernis liegt. Gemessen werden die Standlinie $\overline{AB}$ sowie von A bzw. P aus die Winkel α, β, γ, δ. Berechne $\overline{PQ}$ für $\overline{AB} = 1.8km$; $\angle PAB = \alpha = 68°$; $\angle PAQ = \beta = 42°$; $\angle ABQ = \gamma = 85°$; $\angle PBQ = \delta = 36°$.

$$\begin{aligned} &\angle ABP = \gamma - \delta = 49° \\ &\angle BPA = 180° - \alpha - 49° = 63° \\ &\overline{BP}\ :\ \frac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(63°)} \\ &\qquad \overline{BP} = \frac{1.8 \cdot \sin(68°)}{\sin(63°)} = 1.873km \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\angle QAB = \alpha - \beta = 26° \\ &\angle BQA = 180° - \gamma - 26° = 69° \\ &\overline{BQ}\ :\ \frac{\overline{BQ}}{\sin(26°)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(69°)} \\ &\qquad \overline{BQ} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin(26°)}{\sin(69°)} = 0.845km \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{BQ}^2 + \overline{BP}^2 - 2 \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{BP} \cdot \cos(\delta) \\ \overline{PQ} &= \underline{\underline{1.289km}} \end{aligned}$$

3.2 Aufgaben

1. Berechne im Dreieck ABC die fehlenden Winkel und Seiten aus:
   a) $a = 15$, $\alpha = 35°$, $\beta = 50°$
   b) $b = 9.3$, $c = 7.8$, $\beta = 51.3°$
   c) $c = 12$, $\beta = 9.7°$, $\gamma = 93.8°$
   d) $a = 49$, $b = 57$, $\alpha = 84°$

2. Berechne im Dreieck die fehlenden Seiten und Winkel aus:
   a) $a = 8$, $b = 5$, $\gamma = 75°$
   b) $a = 9.81$, $c = 7.25$, $\beta = 5.31°$
   c) $b = 63.2$, $c = 31.1$, $\alpha = 109.3°$
   d) $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$
   e) $a = 23$, $b = 38$, $c = 29$
   f) $a = 8.12$, $b = 15.66$, $c = 5.89$

3. Berechne im Dreieck die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt aus:
   a) $\alpha = 42°$, $b = 3$, $c = 7$
   b) $\beta = 123°$, $c = 4$, $a = 5$
   c) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$
   d) $a = 12.3$, $b = 32$, $c = 13.2$

Lösungen

1. a) $b = 20.03$, $c = 26.05$, $\gamma = 95°$
   b) $a = 11.91$, $\alpha = 87.81°$, $\gamma = 40.89°$
   c) $a = 11.68$, $b = 2.03$, $\alpha = 76.5°$
   d) Kein Dreieck!

2. a) $c = 8.26$, $\alpha = 69.24°$, $\beta = 35.76°$
   b) $b = 7.74$, $\alpha = 81.70°$, $\gamma = 47.00°$
   c) $a = 79.12$, $\beta = 48.93°$, $\gamma = 21.77°$
   d) $\gamma = 78.46°$, $\alpha = 44.41°$, $\beta = 57.12°$
   e) $\beta = 93.18°$, $\alpha = 37.18°$, $\gamma = 49.64°$
   f) Kein Dreieck!

3. a) $a = 5.2$, $\beta = 22.8°$, $\gamma = 115.2°$, $A = 7.03$
   b) $b = 7.9$, $\alpha = 32.0°$, $\gamma = 25.0°$, $A = 8.39$
   c) $\alpha = 53.1°$, $\beta = 59.5°$, $\gamma = 67.4°$, $A = 84$
   d) Kein Dreieck!

4 Trigonometrische Anwendungsbeispiele

1. In einen Berg werden vom gleichen Punkt aus zwei geradlinige Stollen getrieben, die miteinander einen Winkel von 30° einschliessen. Der eine Stollen ist 5 km, der andere 7 km lang. wie weit sind die Endpunkte der Stollen voneinander entfernt und welche Winkel schliesst die Verbindungslinie mit den Stollen ein?

2. Ein Quader hat die Länge $\overline{AB} = 8cm$, die Breite $\overline{BC} = 5cm$ und die Höhe $\overline{BD = 3cm}$. S sei der Schnittpunkt der Raumdiagonalen des Quaders. Berechne den Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$.

3. Unter welchem Winkel sind bei einem Tetraeder die Seitenkanten (die Seitenflächen) gegen die Grundfläche geneigt?

4. Um die Entfernung zweier Punkte P und Q zu bestimmen, zwischen denen ein Hindernis liegt, wählt man einen geeigneten Hilfspunkt A und misst AP , AQ und $\angle PAQ$. Berechne $\overline{PQ}$ für $\overline{AP} = 168m$; $\overline{AQ} = 214m$; $\alpha = 81.5°$.

5. Zwei waagrechte Stollen in einem Bergwerk gehen von einem Punkt A unter dem Winkel $\alpha = 75°$ aus und haben die Längen $\overline{AB} = 325m$ und $\overline{AC} = 275m$. Wie lang würde ein Verbindungsstollen von B nach C? Unter welchen Winkeln gegen BA und CA muss man ihn von B und C aus vortreiben?

6. Um die Entfernung $\overline{PQ}$ zweier unzugänglicher Punkte P und Q zu bestimmen, hat man eine Standlinie $\overline{AB} = 364.7m$ abgesteckt und $\angle PAB = \alpha = 68.2°$, $\angle QAB = \beta = 34.9°$, $\angle PBA = \gamma = 29.9°$, $\angle QBA = \delta = 80.6°$ gemessen. (Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten). Bestimme die Länge von $\overline{PQ}$.

7. Um die Höhe eines Berggipfels G zu bestimmen, misst man in den Endpunkten einer horizontalen Standlinie AB mit $\overline{AB} = 26.7m$ die Horizontalwinkel $\angle CAB = \alpha = 83.1°$ und $\angle ABC = \beta = 64.5°$, ferner den Höhenwinkel $\angle GAC = \gamma = 26°$ und (zur Kontrolle) $\angle GBC = \delta = 24°$. Wie hoch liegt G über A, wenn C der Fusspunkt auf der Horizontalhöhe AB von G ist.

8. Zwei gegenüberliegende Punkte A und B an den Ufer eines Flusses erblickt man von einem Aussichtspunkt C aus unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 18.5°$ und $\beta = 25.8°$. Die Strecke AB erscheint unter dem Horizontalwinkel $\gamma = 31.3°$.
Wie breit ist der Fluss, wenn C um $h = 186.5m$ über A und B liegt?

Lösungen

1. ca. 3658 m; ca. 43.12° und ca. 106.88°

2. $\angle ASB = 107.8°$, $\angle BSC = 60.7°$

3. Seitenkante, Grundfläche: 54.7°; Seitenfläche, Grundfläche: 70.5°

4. P und Q liegen 251.8 m auseinander

5. Stollen: 367.4 m lang. $\angle ABC = 46.3°$, $\angle BCA = 58.7°$

6. 265.1 m

7. G liegt 269 m über A

8. 303.4 m

5 Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

Ein Einheitskreis hat den Radius 1 und den Mittelpunkt im Ursprung. Gebraucht sind ein Winkel α (in Bogenmass) und einen Punkt $P(x; y)$ auf dem Kreis.

$$\sin(\alpha) = y$$
$$\cos(\alpha) = x$$

Da der Kreis rund ist, wiederholen sich die Werte periodisch.

5.1 Zusammenhang: Einheitskreis & Trigonometrische Funktionen

Der Einheitskreis ist das Urbild. Die Funktionsgraphen sind das Abbild über die Zeit (Winkel α).

6 Grad- und Bogenmass

Gradmass (°) - Bogenmass (`rad`):

$$\frac{\text{Gradmass} \cdot \pi}{180°} = \texttt{rad}$$

Bogenmass (`rad`) - Gradmass (°):

$$\pi \Rightarrow 180° \mathrel{\widehat{=}} \text{Gradmass}$$

Definition der Winkelmasse: positiv → Gegenuhrzeigersinn / negativ → Uhrzeigersinn

Merke:

°	30°	45°	57.30°	60°	90°	180°	270°	360°
RAD	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabelle 1: Häufige Umrechnungen zwischen Gradmass und Bogenmass

6.1 Aufgaben

1. Gib die Winkel im Bogenmass als Vielfaches oder Teile von π an!
   a) 15° b) 120°
   c) 315° d) 330°
   e) 135° f) 150°
   g) 300° h) 270°

2. Gib die Winkel im Gradmass an!
   a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{4\pi}{3}$
   c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{12}$
   e) $\frac{7\pi}{12}$ f) $\frac{7\pi}{6}$
   g) $\frac{35\pi}{36}$ h) 1

Lösungen

1. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{2\pi}{3}$
   c) $\frac{7\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{6}$
   e) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{5\pi}{6}$
   g) $\frac{5\pi}{3}$ h) $\frac{3\pi}{2}$

2. a) 135° b) 240°
   c) 90° d) 15°
   e) 105° f) 210°
   g) 175° h) 57.296°

7 Trigonometrische Gleichungen

$$\mathrm{trig}(ax + b) = c$$

Trigonometrischer Koeffizient, konstantes Glied

Substitution (Vorgehen) und Rücksubstitution:

$$\mathrm{trig}(z) = c \Rightarrow z = ax + b \Rightarrow x = \frac{z - b}{a}$$

Funktion	Grundlösung für z	Periode
$\sin(z) = c$	$z_1 = \arcsin(c),\ z_2 = \pi - \arcsin(c)$	2π
$\cos(z) = c$	$z_{1,\ 2} = \pm \arccos(c)$	2π
$\tan(z) = c$	$z = \arctan(c)$	π

Tabelle 2: Übersicht: Trigonometrische Gleichungen

7.1 Beispiele

1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2} \\ \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &\Rightarrow z_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ z_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \underline{\underline{k\pi}} \\ 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} + k\pi}} \end{aligned}$$

2. $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sqrt{3}\cos(x) \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \sqrt{3} \\ \tan(x) &= \sqrt{3} \\ x_1 &= \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}} \\ x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} &= \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}} \end{aligned}$$

3. $2\sin^2(x) - \sin(x) = 1 \qquad s = \sin(x)$

$$\begin{aligned} 2s^2 - s - 1 &= 0 \\ (2s+1)(s-1) &= 0 \\ s_1 &= -0.5 \\ s_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1: \ -0.5 &= \sin(x_h) \\ x_h &= \arcsin(-0.5) = -\frac{\pi}{6} \\ x_1 &= x_h + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \\ x_2 &= \pi - x_h = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2: \ 1 &= \sin(x_3) \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

4. $3\sin(x) - 2\cos(x) + 3 = 0$

$$\begin{aligned} 3\sin(x) - 2\sqrt{1-\sin^2(x)} + 3 &= 0 \\ (3\sin(x)+3)^2 &= (2\sqrt{1-\sin^2(x)})^2 \\ 9\sin(x) + 18\sin(x) + 9 &= 4(1-\sin^2(x)) \\ &= 4 - 4\sin^2(x) \\ 13\sin^2(x) + 18\sin(x) + 5 &= 0 \qquad u = \sin(x) \\ 13u^2 + 18u + 5 &= 0 \\ (13u+5)(u+1) &= 0 \\ u_1 &= -\frac{5}{13} \\ u_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1: \ -\frac{5}{13} &= \sin(x_h) \\ x_h &= -0.395 \\ x_1 &= x_h + 2\pi = 5.888 \\ x_2 &= \pi - x_h = 3.536 \ ↯ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2: \ -1 &= \sin(x_3) \\ x_3 &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{3\pi}{2}; 5.888 \right\}$$

7.2 Aufgaben

1. Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichungen im Bogenmass:
   a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $2\cos(x) = \frac{1}{2}$
   c) $\tan(2x) = 1$
   d) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichungen im Gradmass:
   a) $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$
   b) $\cos(\alpha) = \sqrt{3}\sin(\alpha)$
   c) $\sin(\alpha) + \tan(\alpha) = 0$

3. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0; 2\pi]$
   a) $5\sin(x) = 3$
   b) $4\cos(x) = -1$
   c) $3\sin(x) - 2 = 0$
   d) $0.5\cos(x) = -0.2$
   e) $\sqrt{3}\sin(x) = -1$
   f) $3\sin(x) - \cos(x) = 1.2$
   g) $4\cos(x) = 1 - 2\cos(x)$
   h) $3\tan(x) = 4 - \tan(x)$
   i) $5\tan(x) + 3 = \tan(x)$
   j) $\sin^2(x) = 0.25$
   k) $5\cos^2(x) = 1$
   l) $\sin(x) = \frac{1}{9\sin(x)}$
   m) $\tan(x) = \frac{3}{\tan(x)}$

4. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0°; 360°]$
   a) $9\sin^2(\alpha) + 3\sin(\alpha) = 2$
   b) $3 + \cos(\beta) = \cos^2(\beta)$
   c) $2\cos(\gamma) - 3\sin(\gamma)\cos(\gamma) = 0$
   d) $\sin(\delta) + \tan(\delta) = 0$

5. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0; 2\pi[$
   a) $3\sin^2(x) + 7\cos^2(x) = 9$
   b) $5\tan(x) = -2$
   c) $4\cos^2(x) = 1$
   d) $6\sin^2(x) + 1 = 5\sin(x)$

6. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0°; 360°]$
   a) $\sin(\alpha - 68°) = 0.5$
   b) $\cos(190° - \beta) = 1$
   c) $\tan(45° - 2\gamma) = 0$
   d) $\sin(2\delta + 30°) = 0.3$
   e) $2\cos^2(22° + 2\epsilon) - \cos(22° + 2\epsilon) = 0$

7. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0; 2\pi[$
   a) $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
   b) $\sin^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$
   c) $\cos(\pi - 2x) = 0$
   d) $\sin(1 - 2x) = -0.6$
   e) $\cos(4x) = -0.6$
   f) $\tan^2(2x) + \tan(2x) = 3$

Lösungen

1. a) $\mathbb{L} = \{k \mid k = \frac{\pi}{3} + z \cdot 2\pi \vee k = \frac{2\pi}{3} + z \cdot 2\pi; z \in \mathbb{Z}\}$
   b) $\mathbb{L} = \{k \mid k = 1.318 + z \cdot 2\pi \vee k = 4.965 + z \cdot 2\pi; z \in \mathbb{Z}\}$
   c) $\mathbb{L} = \{k \mid k = \frac{\pi}{8} + z \cdot \pi \vee k = \frac{5\pi}{8} + z \cdot \pi; z \in \mathbb{Z}\}$
   d) $\mathbb{L} = \{k \mid k = \frac{\pi}{12} + z \cdot 2\pi \vee k = \frac{\pi}{12} + z \cdot 2\pi; z \in \mathbb{Z}\}$

2. a) $\mathbb{L} = \{k \mid k = 45° + z \cdot 180°; z \in \mathbb{Z}\}$
   b) $\mathbb{L} = \{k \mid k = 30° + z \cdot 180°; z \in \mathbb{Z}\}$
   c) $\mathbb{L} = \{k \mid k = z \cdot 180°; z \in \mathbb{Z}\}$

3. a) $\mathbb{L} = \{0.64; 2.50\}$
   b) $\mathbb{L} = \{1.82; 4.46\}$
   c) $\mathbb{L} = \{1.82; 4.46\}$
   d) $\mathbb{L} = \{1.98; 4.30\}$
   e) $\mathbb{L} = \{3.76; 5.67\}$
   f) $\mathbb{L} = \{0.64; 2.50\}$
   g) $\mathbb{L} = \{1.40; 4.88\}$
   h) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\}$
   i) $\mathbb{L} = \{2.50; 5.64\}$
   j) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\}$
   k) $\mathbb{L} = \{1.11; 2.03; 4.25; 5.18\}$
   l) $\mathbb{L} = \{0.34; 2.80; 3.48; 5.94\}$
   m) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$

4. a) $\mathbb{L} = \{19.48°; 160.43°; 221.73°; 317.99°\}$ b) $\mathbb{L} = \{\}$
   c) $\mathbb{L} = \{41.83°; 90°; 138.08°; 270°\}$ d) $\mathbb{L} = \{0°; 180°\}$

5. a) $\mathbb{L} = \{\}$ b) $\mathbb{L} = \{2.76; 5.90\}$
   c) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$ d) $\mathbb{L} = \{0.3398; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; 2.8018\}$

6. a) $\mathbb{L} = \{98°; 218°\ \}$
   b) $\mathbb{L} = \{190°\}$
   c) $\mathbb{L} = \{22.5°; 112.5°; 202.5°; 292.5°\}$
   d) $\mathbb{L} = \{44.18°; 115.82°; 164.18°; 235.82°; 284.18°; 355.82°\}$
   e) $\mathbb{L} = \{19°; 34°; 124°; 139°; 199°; 214°; 304°; 319°\}$

7. a) $\mathbb{L} = \{\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3};\ \}$
   b) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\ \}$
   c) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4};\}$
   d) $\mathbb{L} = \{0.8218; 1.7490; 3.9633; 4.8906\ \}$
   e) $\mathbb{L} = \{0.3165; 1.2543; 1.8873; 2.8251; 3.4581; 4.3959; 5.0289; 5.9667\ \}$
   f) $\mathbb{L} = \{0.4581; 0.9902; 2.0289; 2.5610; 3.5997; 4.3131; 5.1705; 5.7026\ \}$