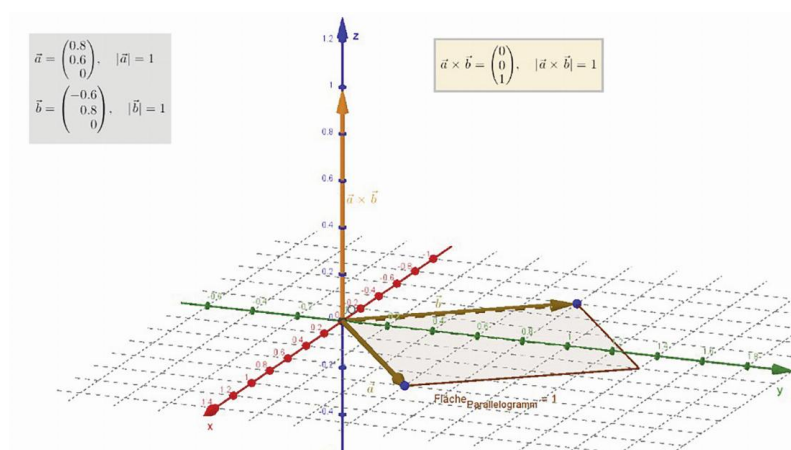


# Vektorgeometrie - Grundlagen



Rosshan Ravintharasa

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelverzeichnis</b>	<b>2</b>
<b>1 Vektorrechnung</b>	<b>3</b>
1.1 Definition eines Vektors . . . . .	3
1.2 Vektor als Komponente und Betrag . . . . .	3
1.3 Vektoraddition / -subtraktion und skalare Multiplikation . . . . .	3
1.4 Linearkombinationen . . . . .	3
1.5 Ortsvektor . . . . .	3
1.6 Skalarprodukt . . . . .	4
1.7 Vektorprodukt . . . . .	4
1.8 Spatprodukt . . . . .	5
1.9 Kollinearität und Komplanarität . . . . .	5
<b>2 Aufgaben: Vektorrechnung</b>	<b>6</b>
<b>3 Analytische Geometrie</b>	<b>8</b>
3.1 Geraden . . . . .	8
3.2 Ebenen . . . . .	8
3.3 Kugel . . . . .	9
3.4 Schnittprobleme . . . . .	9
3.5 Abstandsprobleme . . . . .	12
<b>4 Aufgaben: Analytische Geometrie</b>	<b>14</b>
<b>5 Lösung</b>	<b>16</b>

# Formelverzeichnis

- S.101 | Koordinatengleichung der Geraden
- S.102 | Abstand Punkt-Gerade
- S.102 | Definition eines Vektors
- S.103 | Einfache Vektoroperationen
- S.103 | Kollinearität und Komplanarität
- S.104f | Betrag, Skalar-, Vektor-, Spatprodukt
- S.106 | Schwerpunkt eines Dreiecks
- S.106 | Flächen und Volumina
- S.106 | Parameterdarstellung der Geraden
- S.106 | Parameterdarstellung der Ebene
- S.106 | Normalenform der Ebene
- S.106 | Koordinatengleichung der Ebene
- S.106 | HESSE'sche Normalenform
- S.106 | Schnittwinkel
- S.106f | Abstandsprobleme

# 1 Vektorrechnung

## 1.1 Definition eines Vektors

Ein Vektor ist die Menge aller Pfeile gleicher Länge (Betrag), gleicher Richtung und gleicher Orientierung.

Vektorenberechnung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix}$$

## 1.2 Vektor als Komponente und Betrag

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponent} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \hat{=} \text{Betrag}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponent} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{=} \text{Betrag}$$

Betrag  $\hat{=}$  Länge eines Vektors

## 1.3 Vektoraddition / -subtraktion und skalare Multiplikation

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_a \\ t \cdot y_a \end{pmatrix}$$

## 1.4 Linearkombinationen

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

Lineare Abhängigkeit:

- Linear unabhängig: Keiner der Vektoren lässt sich als Linearkombination der anderen schreiben.
- Linear abhängig: Die Vektoren lassen sich als Linearkombination der anderen schreiben (bei 2 Vektoren: kollinear / bei 3 Vektoren: komplanar).

## 1.5 Ortsvektor

Pfeil (Repräsentant), bei dem der Ausgangspunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt  $M$  eines Ortsvektor (für  $x = a$  und  $y = a$ ):

$$\text{Aus } a_M = \frac{a_P + a_Q}{2} \text{ folgt } a_M = \frac{a}{2}$$

Ortsvektor des Schwerpunkts eines Dreiecks  $ABC$ :

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

### 1.6 Skalarprodukt

Formel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Geometrische Interpretation:

$$\text{Winkelberechnung} \hat{=} \phi = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

$$\text{Spitzer Winkel} \hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{Stumpfer Winkel} \hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{Rechter Winkel (orthogonal)} \hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad \text{Kommutativität}$$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad \text{Distributivität}$$

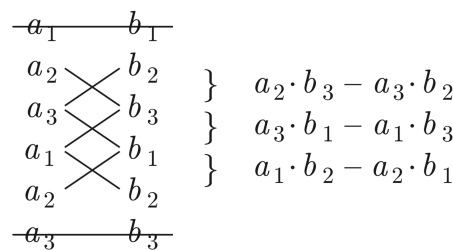
$$(s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \text{Skalar ausklammerbar}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi) \qquad \text{Winkelberechnung}$$

### 1.7 Vektorprodukt

Formel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



Geometrische Interpretation:

$$\text{Senkrecht} \hat{=} \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\text{Kollinear} \hat{=} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{Fläche des Rechtecks} \hat{=} \vec{a} \times \vec{b}$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \qquad \text{Nullvektor}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \text{nicht kommutativ, aber antisymmetrisch}$$

$$(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \text{Skalar ausklammerbar}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad \text{Distributivgesetz}$$

## 1.8 Spatprodukt

Formel:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Geometrische Interpretation:

$$\text{Komplanar} \hat{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{Volumen des Spats} \hat{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Flächenberechnung:

$$A = M |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$$

Volumenberechnung:

$$V = M (\vec{a} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|)$$

Multiplikationsfaktor  $M$ :

Fläche:

- Parallelogramm  $\hat{=} 1$
- Dreieck  $\hat{=} \frac{1}{2}$

Volumen:

- Spat  $\hat{=} 1$
- Dreiseitiges Prisma  $\hat{=} \frac{1}{2}$
- Tetraeder  $\hat{=} \frac{1}{6}$

## 1.9 Kollinearität und Komplanarität

Die **Kollinearität** von Vektoren können durch das Multiplizieren der Komponente überprüft werden. Wenn die Komponente eines Vektor durch eine Multiplikation den Komponenten des anderen Vektors entspricht, sind die Vektoren kollinear (oder Vektorprodukt  $\hat{=} 0$ ). Mathematisch gilt für kollineare Vektoren:

$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Die **Komplanarität** von Vektoren können durch die Darstellung als Linearkombinationen überprüft werden. Wenn die Vektoren gegenseitig durch Linearkombinationen dargestellt werden können, sind die Vektoren komplanar (oder Spatprodukt  $\hat{=} 0$ ). Mathematisch gilt für komplanare Vektoren:

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

## 2 Aufgaben: Vektorrechnung

1. Notiere den Vektor von  $A$  nach  $B$  in Komponentenschreibweise.

a)  $A(0; 2)$  und  $B(3; 6)$

b)  $A(9; -3; 5)$  und  $B(5; 5; -3)$

2. Berechne den Betrag der jeweiligen Vektoren der vorherigen Aufgabe.

3. Führe die einfachen Vektoroperationen durch.

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c)  $-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

d)  $4 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Untersuche, ob sich  $\vec{r}$  als Linearkombination  $s\vec{u} + t\vec{v}$  schreiben lässt.

a)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Untersuche die Vektoren in den Teilaufgaben a) und b) auf Kollinearität und die Vektoren in Teilaufgaben c) und d) auf Komplanarität.

a)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4.5 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. Das Skalarprodukt.

a) Berechne das Skalarprodukt:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\phi = 37.87^\circ$

b) Entscheide, ob das Dreieck  $ABC$  einen rechten Winkel besitzt:

- $A(5; -2; 0)$ ,  $B(9; 9; -3)$ ,  $C(1; 3; -2)$
- $A(7; 9; 3)$ ,  $B(-2; 9; 3)$ ,  $C(-4; 3; 5)$

c) Gegeben sind die Vektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}$ . Berechne den Wert  $r$  so, dass der Zwischenwinkel von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ ...

- ...  $90^\circ$  misst.
- ...  $60^\circ$  misst.

7. Das Vektorprodukt.

a) Berechne das Vektorprodukt:  $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Zeige, dass der Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  orthogonal zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und zu  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist.

- c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .
- $A(0; 0)$ ,  $B(4; -7)$ ,  $C(6; -1)$
  - $A(8; 1; 3)$ ,  $B(3; 8; 1)$ ,  $C(1; 3; 8)$
  - $A(3; -1; 7)$ ,  $B(9; 2; 5)$ ,  $C(5; 0; 3)$
8. Gegeben sind die Punkte  $A(3; 7; 4)$ ,  $B(2; 1; 8)$ ,  $C(9; 5; 2)$  und  $S(0; 0; 10)$ . Berechne das Volumen.
- des Spats, der durch Vektor  $\overrightarrow{SA}$ ,  $\overrightarrow{SB}$  und  $\overrightarrow{SC}$  aufgespannt wird.
  - des dreiseitigen Prismas mit der Grundfläche  $ABC$  und Kante  $AS$ .
  - der dreiseitigen Pyramide mit der Grundfläche  $ABC$  und Spitze  $S$ .
9. Liegt der Punkt  $P$  in der von  $U(2; 9; -5)$ ,  $V(8; -6; 4)$  und  $W(3; 4; -1)$  gebildeten Ebene  $E$ ?
- $P(0; 0; 0)$
  - $P(1; 2; 3)$
  - $P(13; -7; 0)$

### 3 Analytische Geometrie

#### 3.1 Geraden

Parameterdarstellung und Koordinatenform:

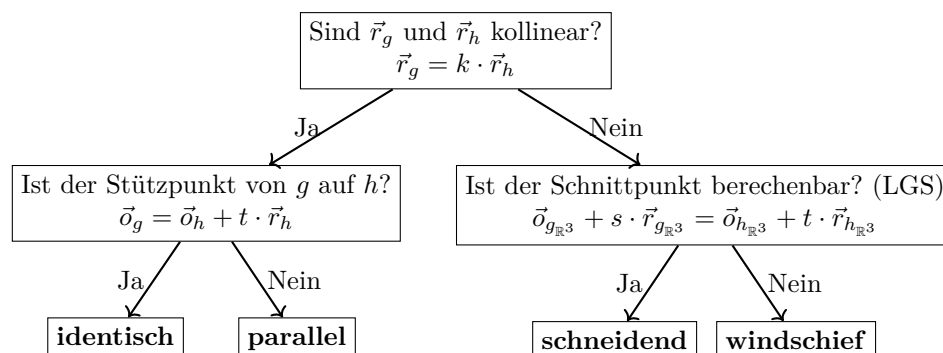
$$\vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} = \vec{o} + s \cdot \vec{r} \quad \text{und} \quad ax + by + c = 0$$

Umrechnung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$	<b>Parameterdarstellung</b>
$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -m_y \\ m_x \end{pmatrix}$	$\vec{n}$ ist senkrecht zum Richtungsvektor
$-r_y \cdot x + r_x \cdot y + c = 0$	$-r_y = a$ und $r_x = b$
$-(-r_y \cdot A_x + r_x \cdot A_y) = c$	$c$ berechnen
$ax + by + c = 0$	<b>Koordinatenform</b>

Lagebeziehungen:

$$g : \vec{x} = \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g \quad h : \vec{x} = \vec{o}_h + t \cdot \vec{r}_h$$



#### 3.2 Ebenen

Parameterdarstellung und Koordinatenform:

$$\vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC} = \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \quad \text{und} \quad ax + by + cz + d = 0$$

Besonderheiten:

$$\begin{aligned}
 a = 0 &\Rightarrow by + cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{yz} \\
 b = 0 &\Rightarrow ax + cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{xz} \\
 c = 0 &\Rightarrow ax + by + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{xy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a = b = 0 &\Rightarrow cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_z \\
 b = c = 0 &\Rightarrow ax + d = 0 \hat{=} E \parallel E_x \\
 c = a = 0 &\Rightarrow by + d = 0 \hat{=} E \parallel E_y
 \end{aligned}$$

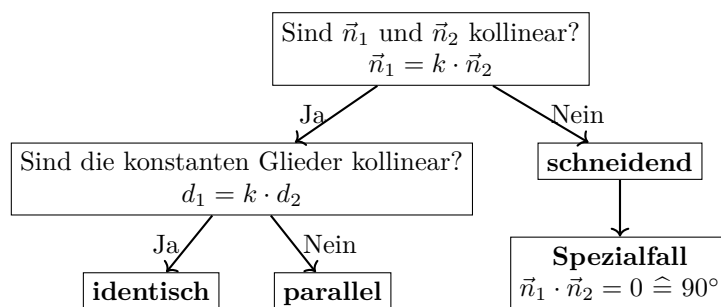
$$0 = ax + by + cz + d \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

$$\begin{array}{l|l}
 \vec{x} = \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 & | \text{Parameterdarstellung} \\
 \vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 & | \vec{n} \text{ mithilfe des Vektorprodukts bilden} \\
 [\vec{x} - \vec{o}] \cdot \vec{n} = 0 & | \text{in die Normalenform einsetzen} \\
 \begin{pmatrix} x - o_x \\ y - o_y \\ z - o_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & | \text{Subtraktion} \\
 a(x - o_x) + b(y - o_y) + c(z - o_z) = 0 & | \text{Skalarprodukt} \\
 ax + by + cz + \underbrace{(-ao_x - bo_y - co_z)}_d = 0 & | \text{Faktorisierung} \\
 ax + by + cz + d = 0 & | \text{Koordinatenform}
 \end{array}$$

Lagebeziehungen:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



### 3.3 Kugel

Koordinatenform mit  $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$  (Ortsvektor des Kreismittelpunkts  $M$ ):

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$$

### 3.4 Schnittprobleme

#### Gerade-Gerade

Ausgangslage: Zwei Geraden in Parameterdarstellung.

Berechnung:

$$\begin{array}{l}
 \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g = \vec{o}_h + t \cdot \vec{r}_h \\
 o_{g,x} + r_{g,x}s = o_{h,x} + r_{h,x}t \\
 o_{g,y} + r_{g,y}s = o_{h,y} + r_{h,y}t \\
 o_{g,z} + r_{g,z}s = o_{h,z} + r_{h,z}t
 \end{array}$$

Diskussion:

$$\begin{array}{l|l}
 0 = 0 & | \text{identisch} \\
 s = t = \frac{1}{2} & | \text{parallel / windschief} \\
 s = s_0 \wedge t = t_0 & | \text{schneidend}
 \end{array}$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{|\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|} \right)$$

**Gerade-Ebene**

Ausgangslage: Gerade und Ebene in Parameterdarstellung.

Berechnung:

$$\vec{o}_G + s \cdot \vec{r}_G = \vec{o}_E + t \cdot \vec{r}_{1,E} + u \cdot \vec{r}_{2,E}$$

$$\begin{aligned} o_{G,x} + r_{G,x}s &= o_{E,x} + r_{1,E,x}t + r_{2,E,x}u \\ o_{G,y} + r_{G,y}s &= o_{E,y} + r_{1,E,y}t + r_{2,E,y}u \\ o_{G,z} + r_{G,z}s &= o_{E,z} + r_{1,E,z}t + r_{2,E,z}u \end{aligned}$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & | \text{ identisch} \\ s = t = u = \zeta & | \text{ parallel / windschief} \\ s = s_0 \wedge t = t_0 \wedge u = u_0 & | \text{ schneidend} \end{array}$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{|\vec{r}_G \cdot (\vec{r}_{1,E} \times \vec{r}_{2,E})|}{|\vec{r}_G| \cdot |\vec{r}_{1,E} \times \vec{r}_{2,E}|} \right)$$

Ausgangslage: Gerade in Parameterdarstellung und Ebene in Koordinatenform.

Berechnung:

$$g : \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}}_{\vec{r}} \quad E : \underbrace{ax + by + cz + d}_{\vec{n}}$$

$$0 = a(o_x + r_x s) + b(o_y + r_y s) + c(o_z + r_z s) + d$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & | \text{ identisch} \\ s = \zeta & | \text{ parallel} \\ s = s_0 & | \text{ schneidend} \end{array}$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} \right)$$

Spezialfall: Die Gerade schneidet eine Koordinatenebene.

1. Spurpunkt: Schnittpunkt mit der
- $xy$
- Ebene [
- $S_1(x; y; 0)$
- ]

$$z = 0 \Rightarrow t : o_z + r_z t = 0$$

2. Spurpunkt: Schnittpunkt mit der
- $yz$
- Ebene [
- $S_2(0; y; z)$
- ]

$$x = 0 \Rightarrow t : o_x + r_x t = 0$$

3. Spurpunkt: Schnittpunkt mit der
- $xz$
- Ebene [
- $S_3(x; 0; z)$
- ]

$$y = 0 \Rightarrow t : o_y + r_y t = 0$$

 $s \vee t \vee u$  einsetzen, um Punkt  $S$  zu berechnen.

**Ebene-Ebene**

Ausgangslage: Zwei Ebenen in Koordinatenform.

Berechnung:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 = k \cdot d_2 & | \text{ identisch} \\ \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 \neq k \cdot d_2 & | \text{ parallel} \\ \vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 \neq k \cdot d_2 & | \text{ schneidend} \end{array}$$

Schnittgerade:

$$\vec{x} = \vec{o}_S + t \cdot \vec{r}_S$$

$$\vec{o}_S \hat{=} x = 0; y \wedge z \hat{=} \text{ im LSG lösen}$$

$$\vec{r}_S \hat{=} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

Spezialfall: Die Ebene schneidet eine Koordinatenebene.

1. Spurgerade: Schnittgerade mit der
- $xy$
- Ebene (
- $z = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0$
- ):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Spurgerade: Schnittgerade mit der
- $yz$
- Ebene (
- $x = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$
- ):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$$

3. Spurgerade: Schnittgerade mit der
- $xz$
- Ebene (
- $y = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0$
- ):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

**Ebene-Ebene-Ebene**

Ausgangslage: Drei Ebenen in Koordinatenform.

Berechnung:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$E_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

Diskussion:

Alle Gleichungen sind kollinear	identisch
LGS hat genau eine Lösung $(x; y; z)$	schneidend (Schnittpunkt $S$ )
LGS hat unendlich viele Lösungen $(0 = 0)$	schneidend (Schnittgerade $g$ )
LGS ist nicht lösbar	nicht schneidend (Prisma-Lage)

**Kugel-Gerade**

Ausgangslage: Gerade in Parameterdarstellung und Kugel in Koordinatenform.

Berechnung:

$$g : \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad K : (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$$

$$r^2 = ((o_x + r_x s) - m_x)^2 + ((o_y + r_y s) - m_y)^2 + ((o_z + r_z s) - m_z)^2$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} s_{1,2} & | \text{Sekante (zwei Schnittpunkte)} \\ s_1 & | \text{Tangente (ein Schnittpunkt)} \\ s = \{\} & | \text{Passante (kein Schnittpunkt)} \end{array}$$

$s$  einsetzen, um Punkt  $S$  zu berechnen.

**Kugel-Ebene**

Ausgangslage: Ebene und Kugel in Koordinatenform.

Berechnung:

$$\text{Aus } E \text{ und } K \text{ folgt } g : \vec{x} = \vec{o}_{M(K)} + S \cdot \vec{n}_E$$

$$g \cap E : a(o_{M(K),x} + n_{E,x}s) + b(o_{M(K),y} + n_{E,y}s) + c(o_{M(K),z} + n_{E,z}s) + d = 0$$

$$|s\vec{x}| = d$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} d < r & | E \in K \\ d = r & | E \text{ ist Tangentialfläche von } K \\ d > r & | E \notin K \end{array}$$

$s$  einsetzen, um Punkt  $S$  zu berechnen.

**3.5 Abstandsprobleme****Punkt-Gerade**

Ausgangslage: Punkt  $P$  und Gerade  $g$  in Parameterdarstellung

Berechnung:

$$g : \vec{x} = \vec{o} + s \cdot \vec{r} \Rightarrow F(o_x + r_x s; o_y + r_y s; o_z + r_z s)$$

$$\vec{FP} = \begin{pmatrix} P_x - (o_x + r_x s) \\ P_y - (o_y + r_y s) \\ P_z - (o_z + r_z s) \end{pmatrix}$$

$$\vec{FP} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} P_x - (o_x + r_x s) \\ P_y - (o_y + r_y s) \\ P_z - (o_z + r_z s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = 0$$

$$s \cap |\vec{FP}| : d = d(P, F_g)$$

**Punkt-Ebene**

Ausgangslage: Punkt  $P$  und Ebene  $E$  in Koordinatenform (Lotfusspunktverfahren)

Berechnung:

$$g_{\perp} : \vec{x} = \vec{o}_P + s \cdot \vec{n}_E$$

$$g \cap E : 0 = a(o_{P,x} + n_{E,x}s) + b(o_{P,y} + n_{E,y}s) + c(o_{P,z} + n_{E,z}s) + d$$

$$s \cap \vec{n}_E \hat{=} P_E : d(P; P_E) = |s \cdot \vec{n}_E|$$

Ausgangslage: Punkt  $P$  und Ebene  $E$  in Koordinatenform (HESSE'sche Normalenform)

Berechnung:

$$E_{\text{HNF}} : 0 = [\vec{x} - \vec{o}_E] \frac{\vec{n}_E}{|\vec{n}_E|}$$

$$P \cap E_{\text{HNF}} : 0 = \frac{ax + by + cz + d}{|\vec{n}_E|} = d(P; E)$$

$$\text{ebenfalls} : d = d(P; E) = |[\vec{o}_P - \vec{o}_E] \cdot \vec{n}_E|$$

### Gerade-Gerade

Ausgangslage: Zwei windschiefe Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in Parameterdarstellung

Berechnung:

$$\vec{x}_1 = \vec{o}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \quad \vec{x}_2 = \vec{o}_2 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$E_h : \vec{x} = \vec{o}_1 + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$E_{\text{HNF}} : 0 = \frac{|ax + by + cz + d|}{|\vec{n}_E|} = d(g_1; g_2)$$

Ausgangslage: Zwei parallele Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in Parameterdarstellung

Berechnung:

$$\vec{x}_1 = \vec{o}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \quad \vec{x}_2 = \vec{o}_2 + t \cdot \vec{r}_2 \Rightarrow F_g(o_{2,x} + r_{2,x}t; o_{2,y} + r_{2,y}t; o_{2,z} + r_{2,z}t)$$

$$\vec{FO}_1 = \begin{pmatrix} o_{1,x} - (o_{2,x} + r_{2,x}t) \\ o_{1,y} - (o_{2,y} + r_{2,y}t) \\ o_{1,z} - (o_{2,z} + r_{2,z}t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{FO}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} o_{1,x} - (o_{2,x} + r_{2,x}t) \\ o_{1,y} - (o_{2,y} + r_{2,y}t) \\ o_{1,z} - (o_{2,z} + r_{2,z}t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{2,x} \\ r_{2,y} \\ r_{2,z} \end{pmatrix} = 0$$

$$t \cap |\vec{FO}_1| : d = d(P, F_g)$$

### Gerade-Ebene

Ausgangslage: Gerade  $g$  in Parameterform und Ebene  $E$  in Koordinatenform

Berechnung:

$$g : \vec{x} = \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g \quad E : ax + by + cz + d = 0$$

$$d = d(g; E) = \frac{|a \cdot o_{g,x} + b \cdot o_{g,y} + c \cdot o_{g,z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### Ebene-Ebene

Ausgangslage: Zwei Ebenen  $E_1$  (mit  $P \in E_1$  und  $P(0; 0; z)$ ) und  $E_2$  in Koordinatenform

Berechnung:

$$E_1 : ax + by + cz + d_1 = 0 \quad E_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$$

$$d = d(E_1; E_2) = d(P; E_2) = \frac{|a \cdot P_x + b \cdot P_y + c \cdot P_z + d|}{|\vec{n}_E|}$$

## 4 Aufgaben: Analytische Geometrie

1. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden  $g$  und  $h$ . Berechne allenfalls den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden.

$$\text{a) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } h : \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } h : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h : \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ -28 \end{pmatrix} \text{ und } h : \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -16 \\ -24 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -23 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } h : \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h : t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme die Koordinatenform der Ebenen, in der nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten.

$$\text{a) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Gesucht sind die Gleichungen der Kugel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$ .

$$\text{a) } M(4; 2; -1), r = 5$$

$$\text{b) } M(2; 1; 4), r = \sqrt{3}$$

4. Prüfe, ob  $A$  und  $B$  auf der Kugel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$  liegen.

$$\text{a) } M(2; -1; 4), r = 3,$$

$$\text{b) } M(-2; 4; 3), r = 6,$$

$$A(4; 1; 5), B(3; 2; 1)$$

$$A(0; 0; 0), B(4; 1; 5)$$

5. Bestimme den Mittelpunkt  $M$  und den Radius  $r$  der Kugel  $K$ .

$$\text{a) } x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 10z = 62$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 11$$

6. Der Punkt  $A$  liegt auf der Kugel  $K$ . Welcher Punkt  $B$  der Kugel  $K$  liegt exakt gegenüber von Punkt  $A$ ?

$$\text{a) } (x-6)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 121, A(8; 4; 9)$$

$$\text{b) } x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 361, A(6; 21; 6)$$

7. Berechne die Schnittpunkte und Schnittwinkel (wenn möglich) bzw. Schnittgeraden.

$$\text{a) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ -26 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, E \text{ durch } A(3; 0; 0), B(0; 5; 0), C(0; 0; 2)$$

$$\text{c) } E_1 : x + 2y + 2z - 6 = 0, E_2 : x - y = 0$$

d)  $K$  mit  $M(-2; 1; 3)$  und  $r = \sqrt{6}$ ,  $g$  durch  $A(-3; -7; 8)$  und  $B(-2; -4; 6)$

e)  $E : 2x - y + 4z - 38 = 0$ ,  $K : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 36$

8. Berechne den Abstand  $d$ .

a)  $P(-1; 4; 5)$ ,  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)  $E : 4x - 4y + 2z - 16 = 0$ ,  $P(5; -5; 6)$

c)  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

## 5 Lösung

### Vektorrechnung

- $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
  - Betrag für Vektor 1a: 5 und 1b: 12.
- $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 32 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$
- $\vec{r} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$
  - $\frac{1}{2}$
- Untersuche die Vektoren in den Teilaufgaben a) und b) auf Kollinearität und die Vektoren in Teilaufgaben c) und d) auf Komplanarität.
  - $\vec{u}$  und  $\vec{w}$  sind kollinear
  - alle drei sind kollinear
  - nicht komplanar
  - komplanar
- 9
  - $\gamma = 90^\circ$
    - nicht rechtwinklig
  - $r = 4$
    - $r = 5.5$
- $\begin{pmatrix} 9 \\ 72 \\ 36 \end{pmatrix}$
  - stimmt bei beiden
  - 19
    - $\frac{39}{2}\sqrt{3} \approx 33.77$
    - 0
- 14
  - 7
  - $\frac{7}{3}$
- $P$  nicht in  $E$
  - $P$  in  $E$
  - $P$  in  $E$

### Analytische Geometrie

- $g \parallel h$
  - $g = h$
- $x + y - z - 3 = 0$
  - $-y + 5 = 0$
- $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$
  - $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 3$
- $A \in K, B \notin K$
  - $A \notin K, B \notin K$
- $r = 10, M(-2; 3; -5)$
  - $r = 4, M(1; -2; 0)$
- $B(4; -8; -9)$
  - $B(-6; -13; -6)$
- $S(0; 0; 7), \phi = 90^\circ$
  - $S(-3; 5; 2), \phi = 48.03^\circ$
  - $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \phi = 76.37^\circ$
  - $S_1(0; 2; 2), S_2(-1; -1; 4) \hat{=} g$  ist eine Sekante
- $|d| = \sqrt{3}$
  - $|d| = 6$
  - $|d| = 2$