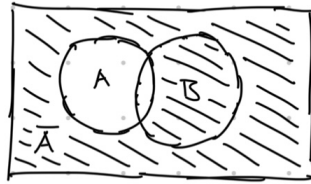
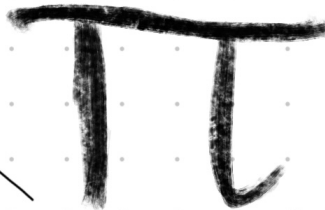
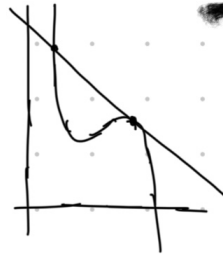


Wissenschaften fürs Gymnasium



$$\sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b \Leftrightarrow \sqrt[b]{c} = a$$



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

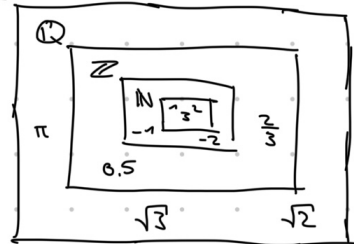
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

\mathbb{R}



Übersicht der Mathematiktheorie

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
0.1 Allgemein	5
0.2 Formelverzeichnis	5
0.3 Aufgabenverzeichnis	6
0.4 Definitionen	8
0.5 Informationen zum Mathematikunterricht	9
1 Algebra	10
1.1 Grundoperationen in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R}	10
1.2 Mengentheoretische Grundlagen	10
1.3 Gleichungen	12
1.4 Potenzen mit rationalen Exponenten	15
1.5 Logarithmen	16
2 Analysis	24
2.1 Folgen und Reihen	24
2.2 Grenzwerte	28
2.3 Definitionen	29
2.4 Lineare Funktionen	29
2.5 Quadratische Funktionen	30
2.6 Potenzfunktionen	32
2.7 Wurzelfunktionen	33
2.8 Exponentialfunktionen	34
2.9 Logarithmusfunktionen	35
2.10 Integralfunktionen	36
2.11 Aufgaben zu den Funktionen	37
2.12 Differentialrechnung	44
2.13 Integralrechnung	52
2.14 Aufgaben zur Infinitesimalrechnung	55
2.15 Differentialgleichungen	64
2.16 Algebraische Hilfsmittel für die Analysis	66
3 Geometrie	68
3.1 Ähnlichkeiten	68
3.2 Trigonometrie	70
3.3 Aufgaben zur Trigonometrie	77
3.4 Vektorrechnung	82
3.5 Analytische Geometrie	85
3.6 Aufgaben zur Vektorgeometrie	91
4 Stochastik	95
4.1 Kombinatorik	95
4.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung	97
A Anhang	104
Beweisführungen	104
Komplexe Zahlen	107
Funktionen zweier Variablen	108
Der binomische Lehrsatz (Paper)	112
Die Gerade (Paper)	115
Übergang in die Lineare Algebra	120
Allgemeinwissen	132

Abbildungsverzeichnis

0.4.1	2D-Koordinatensystem	9
0.4.2	3D-Koordinatensystem	9
1.2.1	Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}	10
1.2.2	Durchschnittsmenge / Schnittmenge: $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$	11
1.2.3	Vereinigungsmenge: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$	11
1.2.4	Differenzmenge: $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$	11
1.2.5	Komplementärmenge / Ergänzungsmenge: $\mathbb{A} = \mathbb{G} \setminus \mathbb{B}$	11
2.6.1	Potenzfunktion mit geraden Exponenten (positiv)	32
2.6.2	Potenzfunktion mit ungeraden Exponenten (positiv)	32
2.6.3	Potenzfunktion mit geraden Exponenten (negativ)	32
2.6.4	Potenzfunktion mit ungeraden Exponenten (negativ)	32
2.10.1	Integrfunktion (Beispiel)	36
2.15.1	Richtungsfelder (Beispiel)	64
3.1.1	Erster und zweiter Strahlensatz	68
3.1.2	Dritter Strahlensatz	68
3.1.3	Zentrische Streckung (Beispiel)	69
4.1.1	Entscheidungsbaum: Kombinatorik	95

Tabellenverzeichnis

0.4.1	Symbole in der Mathematik	9
1.3.1	Lösungsverfahren bei Potenzgleichungen	12
1.4.1	Übersicht: Potenzgleichung	15
2.12.1	Kurvendiskussion: Kochbuch Teil I	47
2.12.2	Kurvendiskussion: Kochbuch Teil II	48
2.12.3	Übersicht der Differentialzusammenhänge	48
2.12.4	Kurvendiskussion: Wörterbuch für Funktionsdetektion	49
2.13.1	Stammfunktion aller Elementarfunktionen	52
2.15.1	Momentane Änderungsraten für $y' = x^2 + y^2 - 1$	64
2.16.1	Vorgehen beim Horner-Schema	66
2.16.2	Vorgehen bei der Polynomdivision	67
3.2.1	Graphen von Winkelfunktionen	70
3.2.2	Häufige Umrechnungen zwischen Gradmass und Bogenmass	73
3.2.3	Übersicht: Trigonometrische Gleichungen	74
4.2.1	Wahrscheinlichkeit bei ungenauer Anzahl Erfolgen	100
4.2.2	Bestimmung von kritischen Punkten bei Funktionen zweier Variablen	111
4.2.3	PASCAL'sche Dreieck	113
4.2.4	Analogie: Binomischer Lehrsatz in der Algebra und Stochastik	114

Quellenverzeichnis

Bamert, Caspar (2023a). *Beschreibende Statistik*.
— (2023b). *Lineare Funktionen*.
— (2023c). *Lineare Gleichungen*.
— (2023d). *Lineare Gleichungssysteme*.
— (2023e). *Mengenlehre*.
— (2023f). *Planimetrie (OneNote-Version)*.
— (2023g). *Quadratische Funktionen*.
— (2023h). *Quadratische Gleichungen*.
— (2023i). *Termumformungen*.
— (2024a). *Die Ableitungsfunktion*.

- Bamert, Caspar (2024b). *Exponential- und Logarithmusfunktionen*.
— (2024c). *Folgen und Reihen*.
— (2024d). *Potenzgleichungen*.
— (2024e). *Trigonometrie und Goniometrie*.
— (2024f). *Vektorgeometrie*.
— (2025). *Anwendungen der Differentialrechnung*.
Delventhal, Katja Maria, Alfred Dipl. Ing. Kissner und Malte Kulick (2002). *Grosser Ratgeber, Mathematik*. Trautwein Edition. Compact Verlag München: Katja Maria Delventhal. ISBN: 3-8174-5296-9.
Durandi, Werner u. a. (2022). *Formeln, Tabellen, Begriffe (Mathematik - Physik - Chemie) [Teil Mathematik]*. 8. aktualisierte Auflage. Orell Füssli Verlag: Werner Durandi. ISBN: 978-3-280-04029-4.
Planing, Patrick (2025a). *Statistik Grundlagen*. URL: <https://statistikgrundlagen.de/ebook/chapter/korrelation/> (besucht am 2025).
— (2025b). *Statistik Grundlagen*. URL: <https://statistikgrundlagen.de/ebook/chapter/regression/> (besucht am 2025).
Stocker, Hansjürg (2020). *Algebra 9/10*. DMK.
Stocker, Hansjürg und Hansruedi Künsch (2018). *Stochastik*. DMK.
Stocker, Hansjürg, Reto Weibel und Marco Schmid (2022). *Analysis*. DMK.
Wikipedia (2024). *Liste mathematischer Symbole*. [Letztes Mal geöffnet: 11.04.2026]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_mathematischer_Symbole.
— (2026). *Gerade*. [Letztes Mal geöffnet: 11.04.2026]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gerade>.

Vorwort

0.1 Allgemein

Übersicht der Mathematiktheorie mit Stoffumfang 3G bis 5G (Wikipedia 2024; Planing 2025a; Planing 2025b; Durandi u. a. 2022; Stocker 2020; Stocker und Künsch 2018; Stocker, Weibel und Schmid 2022; Bamert 2023c; Bamert 2023d; Bamert 2023i; Bamert 2023e; Bamert 2023h; Bamert 2024d; Bamert 2023b; Bamert 2023g; Bamert 2024b; Bamert 2024e; Bamert 2024f; Bamert 2023a; Bamert 2025).

Stand: Kapitel „Stochastik“ (4), 10.04.2026

0.2 Formelverzeichnis

Kapitel **Definitionen:**

- Umschlag (Anfang) | Mathematische Symbole, Zahlenmenge u. Intervalle, griechisches Alphabet etc.

Kapitel **Algebra:**

- S.11 | Mengenlehre
- S.17 | Potenz- und Wurzelgesetze
- S.17 | Logarithmus
- S.20 | Binomische Formel
- S.20 | PASCAL'sche Dreieck (vgl. S.43)
- S.20 | Faktorzerlegung
- S.22 | Quadratische Gleichung
- S.22 | Mitternachtsformel
- S.23 | Kubische Gleichungen
- S.38 | Zahlenfolge
- S.39 | Partialsummenfolge
- S.39 | Arithmetische Folge 1.Ordnung
- S.40 | Geometrische Zahlenfolge
- S.51 | Grenzwertsätze
- S.53 | Kovergente Zahlenfolge
- S.53 | Unendliche geometrische Reihe

Kapitel **Analysis:**

- S.22 | Quadratische Funktionen
- S.56 | Potenzfunktionen
- S.58 | Exponentialfunktionen

- S.58 | Logarithmusfunktionen
- S.62 | Differenzenquotient / Differenzialquotient
- S.63 | Ableitungsregeln
- S.65 | Ableitung spezieller Funktionen
- S.65ff | Kurvendiskussion
- S.70 | Integrationsgrenzen
- S.71 | Hauptsatz der Infinitesimalrechnung
- S.71 | Integrationsregeln
- S.72ff | Unbestimmte Integrale
- S.74 | Bestimmte Integrale
- S.75 | Volumen von Rotationskörper
- S.101 | Schnittwinkel
- S.142 | Richtungsfelder

Kapitel **Geometrie:**

- S.18 | Polarkoordinaten (vgl. S.113)
- S.27 | Skalare und Vektoren
- S.58f | Trigonometrische und Arcusfunktionen (vgl. S.98)
- S.84 | Strahlensätze
- S.86ff | Dreiecke
- S.89ff | Vierecke
- S.91 | Bogenmass
- S.92 | Kreis
- S.93ff | Dreidimensionale Körper

- S.97 | Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck
 - S.97 | Trigonometrische Formeln
 - S.98 | Kurven (vgl. S.58f)
 - S.101 | Koordinatengl. der Geraden
 - S.102 | Abstand Punkt-Gerade
 - S.102 | Definition eines Vektors
 - S.103 | Einfache Vektoroperationen
 - S.103 | Kollinear und komplanar
 - S.104f | Betrag, Skalar-, Vektor-, Spatprodukt
 - S.106 | Schwerpunkt eines Dreiecks
 - S.106 | Flächen und Volumina
 - S.106 | Parameterdar. der Geraden
 - S.106 | Parameterdar. der Ebene
 - S.106 | Normalenform der Ebene
 - S.106 | Koordinatengl. der Ebene
 - S.106 | HESSE'sche Normalenform
 - S.106 | Schnittwinkel
 - S.106f | Abstandsprobleme
 - S.113 | Koordinatentransformationen in der Ebene (vgl. S.18)
- Kapitel Stochastik:**
- S.42 | Fakultäten
 - S.42 | Binomialkoeffizienten
 - S.44f | Kombinatorik
 - S.119 | Bedingte Wahrscheinlichkeit
 - S.119 | Pfadregeln
 - S.119 | Satz von BAYES
 - S.119f | Zufallsvariablen
 - S.120 | Erwartungswert
 - S.121 | Binomialverteilung

0.3 Aufgabenverzeichnis

Kapitel Algebra:

- Kapitel „Grundoperationen in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} “ (1.1)
Skript: *Termumformung* (Bamert 2023i)
- Kapitel „Mengentheoretische Grundlagen“ (1.2)
Skript: *Mengentheoretische Lehre* (Bamert 2023e)
- Kapitel „Gleichungen“ (1.3)
Skript: *Lineare Gleichungen / Lineare Gleichungssysteme / Quadratische Gleichungen* (Bamert 2023c; Bamert 2023d; Bamert 2023h)
Buch: *Algebra 9/10* (Stocker 2020); S.11f, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10; S.26f, 1, 3, 5, 7, 9, 13; S.27, 15, 17, 19, 21
S.93ff; 1, 2, 4, 5, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 40, 41, 42; S.113ff, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 16, 26, 27, 28, 31, 32
- Kapitel „Potenzen mit rationalen Exponenten“ (1.4)
Skript: *Potenzgleichungen* (Bamert 2024d)
- Kapitel „Logarithmen“ (1.5)
Skript: *Exponential- und Logarithmusfunktionen* (Bamert 2024b)

Kapitel Analysis:

- Kapitel „Folgen und Reihen“ (2.1)
Skript: *Folgen und Reihen* (Bamert 2024c)
Buch: *Analysis* (Stocker, Weibel und Schmid 2022); S.2ff, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78

- Kapitel „Grenzwerte“ (2.2)
Skript: *Folgen und Reihen* (Bamert 2024c)
Buch: *Analysis* (Stocker, Weibel und Schmid 2022); S.33ff, 17, 18, 21, 25, 45 - 47, 49, 55, 56
- Kapitel „Lineare Funktionen“ (2.4)
Skript: *Lineare Funktionen* (Bamert 2023b)
Buch: *Algebra 9/10* (Stocker 2020); S.56ff, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
- Kapitel „Quadratische Funktionen“ (2.5)
Skript: *Quadratische Funktionen* (Bamert 2023g)
Buch: *Algebra 9/10* (Stocker 2020); S.104ff, 8, 12, 15, 22, 33, 34, 37
- Kapitel „Potenzfunktionen“ (2.6)
Buch: *Algebra 9/10* (Stocker 2020); S.153ff, 1, 3 - 6, 8, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 24, 25, 28
- Kapitel „Wurzelfunktionen“ (2.7)
Buch: *Algebra 9/10* (Stocker 2020); S.158ff, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10
- Kapitel „Exponentialfunktionen“ (2.8)
Skript: *Exponential- und Logarithmusfunktionen* (Bamert 2024b)
- Kapitel „Logarithmusfunktionen“ (2.9)
Skript: *Exponential- und Logarithmusfunktionen* (Bamert 2024b)
- Kapitel „Differentialrechnung“ (2.12)
Skript: *Die Ableitungsfunktion* (Bamert 2024a)
Buch: *Analysis* (Stocker, Weibel und Schmid 2022); S.55ff, 15, 19, 20, 37, 38, 39, 41, 47, 48, 55, 69, 70, 71, 74, 75, 89, 90, 91, 92, 104, 106, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 133, 134, 139, 145, 146, 147, 149, 153, 154, 155, 156, 160, 166
S.81ff, 176, 177, 179, 181, 182, 184, 186, 198, 199, 200, 203, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 233, 236, 239, 243, 247, 248, 250, 254, 256, 260, 262, 266, 268, 269, 280
- Kapitel „Integralrechnung“ (2.13)
Buch: *Analysis* (Stocker, Weibel und Schmid 2022); S.118f, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; S.120f, 14, 15, 16; S.122, 22, 23, 24, 25; S.125ff, 31, 32, 36; S.130ff, 42, 43, 45, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61; S.134ff, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 77, 81, 82, 83, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 116, 117, 119; S.144, 133, 134, 135, 136, 139, 140, 143; S.160, 186, 187, 188, 189
- Kapitel „Differentialgleichungen“ (2.15)
Buch: *Analysis* (Stocker, Weibel und Schmid 2022); S.153, 169, 170, 173, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 183
- Kapitel „Algebraische Hilfsmittel für die Analysis“ (2.16)
Skript: *Anwendungen der Differentialrechnung* (Bamert 2025)

Kapitel Geometrie:

- Kapitel „Ähnlichkeiten“ (3.1)
Skript: *Planimetrie (OneNote)* (Bamert 2023f)
- Kapitel „Trigonometrie“ (3.2)
Skript: *Trigonometrie* (Bamert 2024e)
- Kapitel „Vektorrechnung“ (3.4)
Skript: *Vektorgeometrie* (Bamert 2024f)

- Kapitel „Analytische Geometrie“ (3.5)
Skript: *Vektorgeometrie* (Bamert 2024f)

Kapitel **Stochastik**:

- Kapitel „Kombinatorik“ (4.1)
Buch: *Stochastik* (Stocker und Künsch 2018); S.57ff, 1 - 24ab, 27 - 32, 34 - 38, 40
- Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (4.2)
Buch: *Stochastik* (Stocker und Künsch 2018); S.37ff, 1 - 14, 17 - 23, 25, 28, 29
S.71ff, 1 - 15, 17 - 19
S.85ff, 1 - 14, 17 - 25
S.102ff, 1 - 15
S.118ff, 1 - 22

0.4 Definitionen

$$x + y = z$$

Addition

Summand
Summand
Summe

$$x - y = z$$

Subtraktion

Minuend
Subtrahend
Differenz

$$x \cdot y = z$$

Multiplikation

Faktor
Faktor
Produkt

$$x : y = z$$

Division

Dividend
Divisor
Quotient

$$a_i^n = x$$

Potenz

Basis
Exponent
Index
Potenzwert

$$\sqrt[n]{a} = x$$

Wurzel

Wurzelexponent
Radikant
Wurzelwert

$$\log_a(b) = x$$

Logarithmus

Logarithmusbasis
Numerus
Logarithmuswert

$$f(x) = y$$

Funktion

Name der Funktion
Variable / Stelle / Argument
Funktionswert

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Stammfunktion
 Integralzeichen
 Integrand
 Differential
 Stammfunktion
 Integrationskonstante

$$\binom{n}{k} \text{ im TR: } \begin{matrix} n \text{ nCr } k \\ \text{oder} \\ n \text{ nPr } k \end{matrix}$$

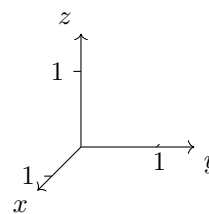
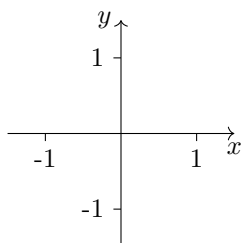
Binomialkoeffizient
 Anzahl Elemente
 Ausgewählte Elemente (bzw. k mal ziehen)

=	gleich	≠	ungleich
⇒	daraus folgt (Implikation)	⇔	genau dann, wenn (Äquivalenz)
⊥	senkrecht, orthogonal, normal	∥	parallel
∝	proportional	≡	identisch, kongruent
≈	ungefähr	~	ähnlich
∈	Element von	∉	kein Element von
⊂	Teilmenge von	⊄	keine Teilmenge von
∧	und	∨	oder
≅	entspricht	:=	definiert

Tabelle 0.4.1: Symbole in der Mathematik

Korrektes Koordinatensystem:

- 2 bzw. 3 Achsen
- Orientierung
- Beschriftung
- (min.) eine Einheit



Zum Beispiel:

Abbildung 0.4.1: 2D-Koordinatensystem

Abbildung 0.4.2: 3D-Koordinatensystem

0.5 Informationen zum Mathematikunterricht

Instruktionen bei Prüfungen:

- Endresultate immer doppelt unterstreichen
- Aufgaben klar nummerieren
- Eine Aufgabe nicht zweimal lösen (wenn doch eine Version durchstreichen)
- Ränder frei lassen
- mit Lineal zeichnen (bspw. Skizzen, Koordinatensystem)
- nie mit gerundeten Werten rechnen (im Taschenrechner)

1 Algebra

1.1 Grundoperationen in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R}

Formen zum Ausdrücken

Aufzählende Form:

$$\mathbb{A} = \{10; 20; 30; 40; 50\}$$

Beschreibende Form:

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist positives Vielfaches von } 10\}$$

oder

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 10n \text{ für } n \in \mathbb{N}\}$$

Name der Menge, x ist Element der *reellen Zahlen*, für die gilt, Beschreibung / Eigenschaft

Rechengesetze

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Distributivgesetz:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Binomische Formel

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1.2 Mengentheoretische Grundlagen

Intervalle

$$[\dots] \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq y \leq z\}$$

$$[\dots[\rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq y < z\}$$

$$]\dots] \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < y \leq z\}$$

$$]\dots[\rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < y < z\}$$

Zahlenmenge

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\} \rightarrow$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\} \rightarrow$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} \hat{=} \text{alle Zahlen, die man mit einem Bruch ausdrücken kann} \rightarrow$ Menge der rationalen Zahlen

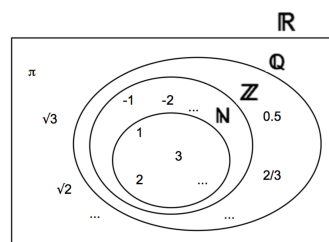


Abbildung 1.2.1: Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}

Spezielle Mengenschreibweise:

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$$

\mathbb{Z}^+ ist die Menge der positiven ganzen Zahlen

\mathbb{R}^- ist die Menge der negativen reellen Zahlen

Venn-Diagramm

Hier sind die verschiedenen Arten des Venn-Diagramms.

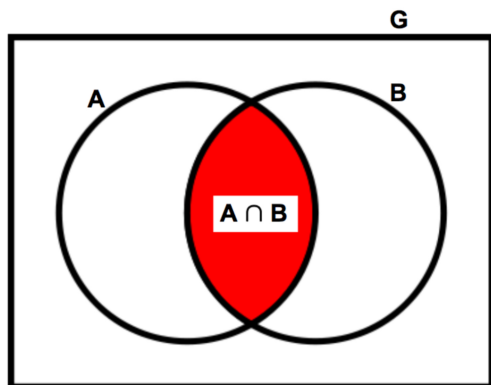


Abbildung 1.2.2: Durchschnittsmenge / Schnittmenge: $A \cap B$

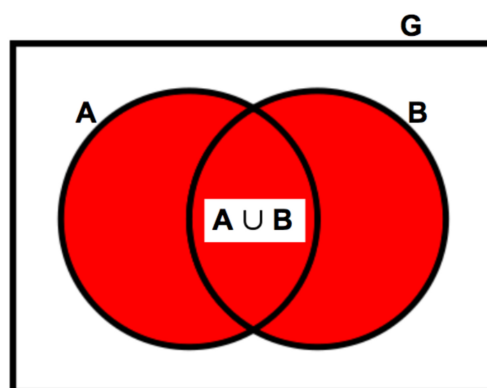


Abbildung 1.2.3: Vereinigungsmenge: $A \cup B$

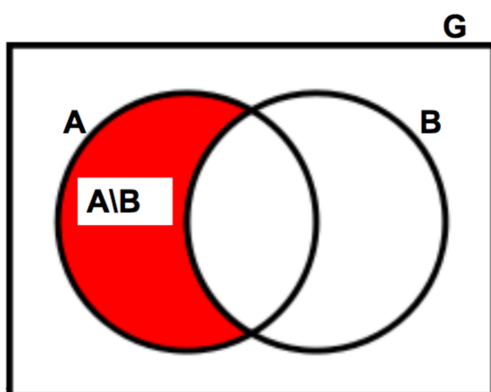


Abbildung 1.2.4: Differenzmenge: $A \setminus B$

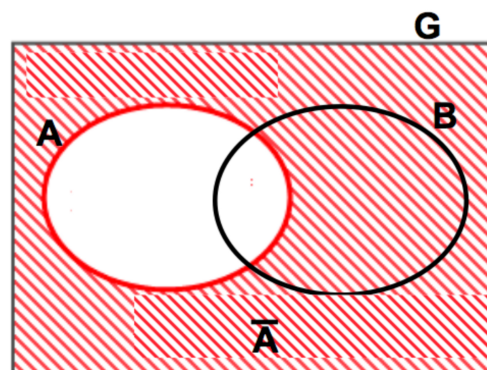


Abbildung 1.2.5: Komplementärmenge / Ergänzungsmenge: $\bar{A} = G \setminus A$

1.3 Gleichungen

Diskussion bei Gleichungen

Zahl $x \hat{=}$ Zahl $x \rightarrow$ unendlich Lösungen \rightarrow unerfüllbar

Zahl $x \hat{=}$ Zahl $y \rightarrow$ keine Lösungen \rightarrow allgemeingültig

Lineare Gleichungen

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

Lineare Koeffizient, konstantes Glied

Bruchgleichungen

$$\frac{a}{x} + b = 0 \tag{2}$$

Lineare Koeffizient, konstantes Glied

Wurzelgleichungen

$$\sqrt{x} + b = 0 \tag{3}$$

Radikant, konstantes Glied

Quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

Quadratischer Koeffizient, linearer Koeffizient, konstantes Glied, $n = 2 \vee 4$

Lösungsverfahren bei $n = 2$ (quadratisch / Mitternachtsformel):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5} \quad D \begin{cases} < 0 & \text{keine Lösung} \\ = 0 & \text{eine Lösung} \\ > 0 & \text{zwei Lösung} \end{cases} \tag{6}$$

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Lösungsverfahren bei $n = 4$ (biquadratisch / Substitution):

$$x^4 + x^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=a} a^2 + a + c = 0 \Rightarrow \text{Lösungsverfahren bei } n = 2 \xrightarrow{x=\sqrt{a_{1,2}}} x_{1,2,3,4} \tag{7}$$

Potenzgleichungen

$$ax^n = 0 \tag{8}$$

Lösungsverfahren

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$x_1 = \sqrt[n]{a}; x_2 = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
$a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$a < 0$	keine Lösung	$x = -\sqrt[n]{ a }$

Tabelle 1.3.1: Lösungsverfahren bei Potenzgleichungen

Exponentialgleichungen

$$ab^{dx+f} + c = 0 \quad (9)$$

Exponentielle Koeffizient, konstantes Glied

Lösungsverfahren bei $b = b$ (Exponentenvergleich):

$$b^{cx+d} = b^{fx+g} \Rightarrow cx + d = fx + g \quad (10)$$

Lösungsverfahren bei exponentiellem Wachstum / Zerfall:

$$A(t) = A(0) \cdot a^t \quad (11)$$

Startfaktor, Wachstums- / Zerfallsfaktor

Logarithmusgleichungen

$$\log_a(x) + c = 0 \quad (12)$$

Numerus, konstantes Glied

Lösungsverfahren bei $\log_a = \log_a$ (Numerusvergleich):

$$\log_a(bx + c) = \log_a(fx + g) \Rightarrow bx + c = fx + g \quad (13)$$

GleichungssystemeAllgemeine Form eines 2×2 -Gleichungssystems

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad ax + by = c \\ \text{II} \quad fx + gy = h \end{array} \quad (14)$$

Lösungsverfahren:

- Substitutionsverfahren / Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren / GAUSS'sche Eliminationsverfahren

Beispiele

1. Lineare Gleichung (mithilfe Äquivalenzumformungen)

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 11 \\ x &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

2. Bruchgleichung (mithilfe Hauptnenner)

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} &= \frac{5}{x(x+1)} \\ x(x+1) \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} \right) &= x(x+1) \cdot \frac{5}{x(x+1)} \\ 2(x+1) + 3x &= 5 \\ 5x + 2 &= 5 \\ x &= \underline{\underline{\frac{3}{5}}} \end{aligned}$$

3. Quadratische Gleichung (mithilfe quadratisches Ergänzen, Mitternachtsformel oder Zweiklammeransatz / binomische Formel erkennen)

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 0 \\(x + 3)^2 &= 0 \\x &= \underline{\underline{-3}}\end{aligned}$$

4. Biquadratische Gleichung (mithilfe Substitution)

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\z^2 - 5z + 4 &= 0 \\z_1 &= 1 & z_2 &= 4 \\x_{1, 2} &= \underline{\underline{\pm 1}} & z_{3, 4} &= \underline{\underline{\pm 2}}\end{aligned}$$

5. Wurzelgleichung (mit Gewinnumformung und Probe)

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} &= x-2 \\(x+2) &= (x-2)^2 \\x+2 &= x^2 - 4x + 4 \\0 &= x^2 - 5x + 2 \\x_1 &= \frac{5 + \sqrt{17}}{2} & x_2 &= \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad \checkmark\end{aligned}$$

6. Gleichungssystem (Substitutions- / Einsetzungsverfahren)

$$\begin{aligned}\text{I } 2x + 3y &= 9 \\ \text{II } y &= 2 \\ \\ 2x + 3 \cdot 2 &= 9 \\ x &= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

7. Gleichungssystem (Additionsverfahren / GAUSS'sche Eliminationsverfahren)

$$\begin{aligned}\text{I } x + 2y &= -1 \\ \text{II } -5x + y &= 16 \\ \\ 5 \cdot \text{I } 5x + 10y &= -5 \\ \text{I} + \text{II } 11y &= 11 \\ y &= \underline{\underline{1}} \quad \Rightarrow x = \underline{\underline{-3}}\end{aligned}$$

1.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Spezialfälle (Potenzen)

Potenzgesetze

$$\begin{aligned}
 a^n a^m &= a^{n+m} \\
 \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
 (a^n)^m &= a^{nm} \\
 a^n b^n &= (ab)^n \\
 \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^1 &= a \\
 a^0 &= 1, a \neq 0 \\
 aa^n &= a^{n+1} \\
 1^n &= 1 \\
 0^n &= 0, n > 0 \\
 a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
 \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}} \\
 a^n = a^m &\Rightarrow n = m
 \end{aligned}$$

Wurzelgesetze

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[kn]{a^{km}} \\
 \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a} \\
 \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\
 \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}
 \end{aligned}$$

Spezialfälle (Wurzel)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{0} &= 0 \\
 \sqrt{a} &= \sqrt[2]{a} \\
 \sqrt[3]{a} &= \sqrt[3]{a} \\
 \sqrt[n]{a^n} &= |a|, a \in \mathbb{R}, n \text{ gerade} \\
 \sqrt[n]{a^{-m}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}
 \end{aligned}$$

Potenzgleichungen

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$x_1 = \sqrt[n]{a}; x_2 = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
$a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$a < 0$	keine Lösung	$x = -\sqrt[n]{ a }$

Tabelle 1.4.1: Übersicht: Potenzgleichung

Beispiele

Löse die Potenzgleichungen.

$$\begin{aligned}
 (0.4x + 1)^5 &= 243 \\
 0.4x + 1 &= 3 \\
 x &= \underline{\underline{5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{x - 1} &= 2 \\
 x - 1 &= 8 \\
 x &= \underline{\underline{9}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^{-\frac{1}{5}} &= 2 \\
 \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} &= 2 \\
 \frac{1}{2} &= x^{\frac{1}{5}} \\
 x &= \underline{\underline{\frac{1}{32}}}
 \end{aligned}$$

1.5 Logarithmen

Definition des Logarithmus

Zehnerlogarithmus	$a = 10$	$\log(b) = \lg(b) = \log_{10}(b)$
Logarithmus naturalis	$a = e \approx 2.72$	$\ln(b) = \log_e(b)$
Zweierlogarithmus	$a = 2$	$\lg(b) = \log_2(b)$

Umformungen

$$a^b = c \iff \log_a(c) = b \iff \sqrt[b]{c} = a$$

Logarithmensätze

1. Logarithmenregel

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

2. Logarithmenregel

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

3. Logarithmenregel

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

Spezialfälle

$$a^{\log_a(b)} = \log_a(a^b) = b$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = \log_a(1) - \log_a(y) = -\log_a(y)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

$$\log_a(b) = \log_a(c) \Rightarrow b = c$$

Aufgaben

Löse die Gleichungen ohne Taschenrechner.

- | | |
|---|--|
| 1. a) $2^x = 8$ | b) $2^x = 1024$ |
| c) $3^x = 81$ | d) $5^x = 625$ |
| 2. a) $5^x = \frac{1}{25}$ | b) $4^x = \frac{1}{2}$ |
| c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$ | d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 625$ |
| 3. a) $2^{2x} = 8$ | b) $2^{3x} = 1024$ |
| c) $3^{4x} = 9$ | d) $5^{6x} = 125$ |
| 4. a) $2^{2x+1} = 16$ | b) $2^{3x-1} = 1024$ |
| c) $3^{4x+3} = 81$ | d) $5^{6x-3} = 625$ |
| 5. a) $2^x = 1$ | b) $2^x = \frac{1}{2}$ |
| c) $2^x = \frac{1}{32}$ | d) $2^x = 0$ |
| 6. a) $2^x = 2^{2x-3}$ | b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x} = 2$ |
| c) $0.1^x = 1000$ | d) $5^{2x-1} \cdot 5^{3x+5} = 5^{4x-2}$ |

- | | | |
|-----|--|---|
| 25. | a) $\text{lb}(8)$
c) $\text{lb}\left(\frac{1}{2048}\right)$ | b) $\text{lb}(1024)$
d) $\text{lb}(8^{12})$ |
| 26. | a) $\ln(e^2)$
c) $\ln(\sqrt[3]{e^2})$ | b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
d) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right)$ |
| 27. | a) $\ln(\sqrt{e})$
c) $\ln\left(\frac{e}{\sqrt[3]{e}}\right)$ | b) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$
d) $\ln(\ln(e))$ |
| 28. | a) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9}\right)$ | b) $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{27}{64}\right)$ |
| 29. | a) $(\log_a(a))^a$
c) $(\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right))^0$ | b) $(\log_a(1))^a$ |
| 30. | a) $25^{\log_5(6)}$ | b) $9^{\log_3(\sqrt{5})}$ |
| 31. | a) $e^{\ln(4)}$ | b) $e^{\frac{3}{2}\ln(4)}$ |
| 32. | a) $\log_x(64) = 3$
c) $\log_x(8) = -3$ | b) $\log_x(1024) = 10$
d) $\log_x\left(\frac{1}{27}\right) = 9$ |
| 33. | a) $\log_x(1) = 0$
c) $\log_x(10'000) = 2$ | b) $\log_x(2) = 0$
d) $\log_x(10) = -\frac{1}{2}$ |
| 34. | a) $e^{\ln(x)} = x$
c) $e^{-\ln(x)} = 3$ | b) $\ln(e^x) = x$
d) $\ln(\ln(x)) = 1$ |
| 35. | a) $\log(x^2) = 2$
c) $\log(\log(x^2)) = 1$ | b) $\log(x^2) = x$
d) $\log(\log(x^2)) = 0$ |

Lösungen

- | | | |
|-----|--|---|
| 1. | a) $x = 3$
c) $x = 4$ | b) $x = 10$
d) $x = 4$ |
| 2. | a) $x = -2$
c) $x = 7$ | b) $x = -\frac{1}{2}$
d) $x = 4$ |
| 3. | a) $x = \frac{3}{2}$
c) $x = \frac{1}{2}$ | b) $x = \frac{10}{3}$
d) $x = \frac{1}{2}$ |
| 4. | a) $x = \frac{3}{2}$
c) $x = \frac{1}{4}$ | b) $x = 3$
d) $x = \frac{7}{6}$ |
| 5. | a) $x = 0$
c) $x = -5$ | b) $x = -1$
d) unlösbar |
| 6. | a) $x = 3$
c) $x = -3$ | b) $x = \frac{5}{3}$
d) $x = -6$ |
| 7. | a) $x = 1$ | b) $x = 4$ |
| 8. | a) $x = 4$ | b) $x = 3$ |
| 9. | a) $\log(b) + \log(c)$
c) $\log(b) - \log(c)$ | b) $\log(p) + \log(q) + \log(r)$
d) $-\log(m)$ |
| 10. | a) $\log(p) + \log(q) + \log(r) - \log(s) - \log(t)$ | b) $\log(b) - \log(c + d)$ |

11. a) $7\log(m)$ b) $-5\log(b)$
12. a) $\log(12)+\log(q)+\log(r)-\log(s)-\log(t)$ b) $5\log(x-4)$
13. a) 0 b) 0
c) $\log\left(\frac{6}{25}\right)$
14. a) $\log(m)$ b) $\log(x^6)$
c) $\log(y)$ d) $\frac{5}{4}$
15. a) $\frac{3}{2}$ b) -1
c) 1
16. a) 2 b) $\frac{1}{4}$
c) 3
17. a) $x = 3$ b) $x = 9$
c) $x = 49$ d) $x = 16$
18. a) $x = 4$ b) $x = 7; x = \frac{1}{34}$
19. a) $x = \frac{10}{3}$ b) $x = \frac{1}{8}; x = 8$
20. a) $x = \log_7(5)$ b) $x = \log_p(q)$
c) $x = \log_a\left(\frac{p}{q}\right)$ d) $x = \log_{\frac{a}{b}}(c)$
21. a) $7 = \log_2(128)$ b) $1 = \log_{11}(11)$
c) $-2 = \log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ d) $\frac{1}{2} = \log_z(\sqrt{7})$
22. a) $x = \log_9(5)$ b) $x = \log_2(3)$
c) $x = \log_{\left(\frac{a}{b}\right)^2}(c)$ d) $x = \log_{6^3}(6^2) = \frac{2}{3}$
23. a) $u^x = v$ b) $2^x = 12$
c) $\sqrt{2^y} = x$ d) $c^z = \frac{2}{d}$
24. a) 4 b) 0
c) 3 d) -3
25. a) 3 b) 10
c) -2 d) -3
26. a) 2 b) -1
c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{2}$
27. a) $\frac{1}{3}$ b) -3
c) $\frac{3}{4}$ d) 0
28. a) -4 b) 3
29. a) 1 b) 0
c) 1
30. a) 36 b) 5
31. a) 4 b) 8
32. a) $x = 4$ b) $x = 2$
c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
33. a) $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ b) $\{\}$
c) 100 d) $\frac{1}{100}$

Probleme um exponentielles Wachstum bzw. Zerfall (Beispiele)

1. Exponential- / Logarithmusgleichung

$$\begin{aligned}
 y &= c \cdot a^n \\
 50'000 &= 100 \cdot 1.12^x \\
 500 &= 1.12^x \\
 \log_{1.12} 500 &= x \\
 x &= \underline{\underline{54.84}}
 \end{aligned}$$

Konstante, Wachstums- / Zerfallsfaktor

2. Um wie viel Prozent nimmt die Algenmenge in einem See pro Jahr zu, wenn sie innert 12 Jahren von 200 Tonnen auf 400 Tonnen angewachsen ist? (
- t
- in
- J
-)

$$\begin{aligned}
 A(t) &= A(0) \cdot a^t \\
 400 &= 200 \cdot a^{12} \\
 2 &= a^{12} \\
 \sqrt[12]{2} &= a \\
 &\approx 1.05946 \Rightarrow (1.05946 - 1) \cdot 100 \\
 &= \underline{\underline{5.95\% \text{ Zuwachs}}}
 \end{aligned}$$

Startfaktor, Wachstums- / Zerfallsfaktor

3. Bei einer bestimmten radioaktiven Substanz verringert sich die Zahl der Kerne pro Tag um 9.71% durch radioaktiven Zerfall. Heute besitzt ein Kernforschungszentrum 2.6g dieser Substanz. Wie viel besass es vor 30 Tagen? (
- t
- in
- d
-)

$$\begin{aligned}
 A(t) &= A(0) \cdot a^t \\
 A(-30) &= 2.6 \cdot 0.9029^{-30} \\
 &= \underline{\underline{55.69g}}
 \end{aligned}$$

Startfaktor, Wachstums- / Zerfallsfaktor

Aufgaben

- Ein Biologie beobachtet, dass die Grösse der Fläche, die eine Zellkultur auf einer Nährlösung einnimmt, sich in der Stunde um ca. 45% vergrössert. Berechne den Inhalt der Fläche nach 1, 2, 3, 4, 5, n Stunden, wenn sie zu Beginn der Beobachtungen 1000mm^2 eingenommen hat! (der Nährboden sei Unbeschränkt).
- Berechne aus $A(n) = A(0) \cdot 1.45^n$, um welchen Prozentsatz der Flächeninhalt in der ersten halben Stunde zunimmt ($A(0) = 1000$)!
- Zeige, dass in jeder weiteren halben Stunde der Inhalt der Fläche um einen stets gleichen Prozentsatz wächst.
- Die Anzahl der Bakterien in einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion N mit $N(t) = 200 \cdot 1.7^t$ beschrieben (t für Stunden). Berechne die Anzahl der Bakterien nach 1, 2, 5, 10 Stunden!
- Koffein wird im Blut mit einer Rate von 15% pro Stunde abgebaut. Berechne auf ein Zehntel-milligramm genau, wie viel Koffein von anfangs 40 Milligramm nach einer (sechs) Stunde(n) noch im Blut vorhanden ist.

6. Bei radioaktiven Stoffen wird oft die Halbwertszeit angegeben, das ist jene Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Menge zerfällt. Das radioaktive Isotop Barium₁₄₀ hat eine Halbwertszeit von 13 Tagen.
- Stelle das Zerfallsgesetz auf
 - Wie viele Prozent der ursprünglich vorhandenen Menge sind nach 2 Tagen noch vorhanden?
 - Wenn zu Beginn der Beobachtung 3.2 mg vorhanden sind, wieviele mg zerfallen am ersten Tag?
 - Wieviele mg zerfallen am 14. Tag?
7. In einer radioaktiven Substanz zerfallen gewisse Atomkerne durch Aussenden von radioaktiver Strahlung in Atomkerne, die nicht mehr radioaktiv strahlen. Mit der Zeit werden immer weniger Atomkerne radioaktive Strahlung aussenden. Für eine bestimmte radioaktive Probe gilt: Am Anfang sind 10^{20} radioaktive Kerne vorhanden. Nach jeder halben Stunde halbiert sich die Anzahl radioaktiver Kerne; die Anzahl radioaktiver Atomkerne verringert sich kontinuierlich und nimmt in der gleichen Zeitspanne um den gleichen Faktor ab.
- Wie viele radioaktive Kerne sind nach 1, 2, 3, 4, 5, ..., n Stunden vorhanden?
 - Drücke die Anzahl $K(n)$ der radioaktiven Kerne nach n Stunden durch die Anzahl der radioaktiven Kerne nach $(n - 1)$ Stunden aus.
 - Drücke die Anzahl $R(t)$ der radioaktiven Kerne nach t Minuten durch die Anzahl der radioaktiven Kerne nach $(t - 1)$ Stunden aus.
 - Wie viele radioaktive Kerne sind nach 40 Minuten vorhanden?

Lösungen

- 1.
- $A(n)$
- in
- mm^2

$$A(1) = 1450mm^2$$

$$A(2) = 2100mm^2$$

$$A(3) = 3000mm^2$$

$$A(4) = 4400mm^2$$

$$A(5) = 6400mm^2$$

$$A(n) = 1000 \cdot 1.45^n$$

2. 20.4%

3. Herleitung:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= 1000 \cdot 1.45^t \\
 A\left(t + \frac{1}{2}\right) &= 1000 \cdot 1.45^{t+\frac{1}{2}} = \underbrace{1000 \cdot 1.45^t}_{A(t)} \cdot 1.45^{\frac{1}{2}} \\
 &= A(t) \cdot 1.45^{\frac{1}{2}} = A(t) - 1.2041
 \end{aligned}$$

4. Anzahl in
- h

$$1h = 340$$

$$2h = 578$$

$$5h = 2839$$

$$10h = 40'319$$

5. • Berechnung des Wachstumsfaktor a : Der Faktor a ist kleiner als 1, da das Koffein abgebaut wird, d.h. die Koffeinmenge im Blut nimmt ab.

$$100\% - 15\% = 85\% \text{ oder } 0.85$$

- Formel zur Berechnung der Koffeinmenge:

$$f(t) = 40 \cdot 0.85^t$$

$$f(1) = 34 \text{ mg}$$

$$f(6) = 15.086 \text{ mg}$$

6. a) $N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{13}}$
b) $N(2) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{13}} \approx 89.885\%$
c) $N(0) - N(1) = 0.166 \text{ mg}$
d) $N(13) - N(14) = 0.083 \text{ mg}$

7. a) $A(n)$ in h

$$A(1) = 2.5 \cdot 10^{19}$$

$$A(2) = 6.25 \cdot 10^{18}$$

$$A(3) = 1.56 \cdot 10^{18}$$

$$A(4) = 3.91 \cdot 10^{17}$$

$$A(5) = 9.77 \cdot 10^{16}$$

$$A(n) = 10^{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- b) $K(n) = K(n-1) \cdot \frac{1}{4}$
c) $R(t) = R(t-1) \cdot 0.98$
d) $A\left(\frac{2}{3}\right) = 10^{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 3.97 \cdot 10^{19}$

2 Analysis

2.1 Folgen und Reihen

Notation

$$f : n \mapsto a_n$$

$$a_n = f(n)$$

Darstellung

$(a_n) = \{\dots\} \hat{=}$ aufzählende Form (**deshalb mit Klammer**) mit min. 5 Folgglieder

$a_n = n \hat{=}$ allgemeingültige Vorschrift / explizite Darstellung anstatt Funktionsgleichung

$a_n = (-1)^n \hat{=}$ alternierende Folge (abwechselnde Vorzeichen)

$$a_1 = x$$

$$a_{n+1} = a_n \hat{=} \text{Rekursionsformel}$$

Partialsommenfolge

$$(a_n) = \{3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$$

$$s_1 = 3 \qquad \qquad \qquad = 3$$

$$s_2 = 3 + 6 \qquad \qquad \qquad = 9$$

$$s_3 = 3 + 6 + 12 \qquad \qquad \qquad = 21$$

$$s_4 = 3 + 6 + 12 + 24 \qquad \qquad \qquad = 45$$

$$s_5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 \qquad \qquad \qquad = 93$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad = \{3, 9, 21, 45, 93, \dots\}$$

Partialsomme, Partialsommenfolge (Reihe)

Das Summenzeichen Σ

$$\sum_{x=y}^n a_x = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Laufvariable / Laufindex, Startwert, Endwert, Funktion bzgl. der Laufvariable

Aufgaben

$$1. \sum_{i=0}^5 (2i + 1) =$$

$$2. 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 12^3 = \sum_{x=n_2}^{n_1} x^3 \Rightarrow n_1 = ? \quad n_2 = ?$$

$$3. 25 + 30 + 35 + 40 + \dots + 105 = \sum_{x=n_2}^{n_1} n_0 \Rightarrow n_0 = ? \quad n_1 = ? \quad n_2 = ?$$

$$4. \text{Bestimme die Partialsomme } s_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ der Folge mit dem allgemeinen Glied } a_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Lösungen

1. 36
2. $n_1 = 12; n_2 = 3$
3. $n_0 = 5x; n_1 = 21; n_2 = 5$
4. $\ln(n + 1)$

Rechenregeln für das Rechnen mit Summenzeichen

$$\sum_{i=m}^b ca_i = c \cdot \sum_{i=m}^n a_i$$
$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$$

Arithmetische Folgen 1. Ordnung

Explizite Darstellung:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Rekursive Darstellung:

$$a_1; a_{n+1} = a_n + d$$

Patialsommenformel:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrische Folgen

Explizite Darstellung:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Rekursive Darstellung:

$$a_1; a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Patialsommenformel:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Unendlich Geometrische Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots) = \frac{a_1}{1 - q}$$

Gemischte Aufgaben

1. Suche die explizite Darstellung a_n der gegebenen Folge
 - a) 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - b) 2, 4, 8, 16, ...
 - c) 8, 15, 22, 29, 36, ...
 - d) 3, 9, 27, 81, ...
2. Suche die explizite Darstellung a_n der gegebenen Folge
 - a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 - b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
 - c) $-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{9}, -\frac{32}{11}, \dots$
 - d) $\frac{4}{7}, \frac{12}{15}, \frac{20}{23}, \frac{28}{31}, \dots$
3. Suche die explizite Darstellung a_n der gegebenen Folge und die Glieder a_{50} und a_{51} .
 - a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{9}{20}, \dots$
 - b) $\frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{13}, \frac{7}{16}, \frac{8}{19}, \dots$
4. Suche die rekursive Darstellung a_n der gegebenen Folge.
 - a) 6, 13, 27, 55, 111, ...
 - b) 4, 11, 32, 95, 284, ...
5. Suche die rekursive Darstellung a_n der gegebenen expliziten Darstellung einer Folge.
 - a) $a_n = 2n + 34$
 - b) $a_n = 1 - 2n$
 - c) $a_n = (-3)^n$
 - d) $a_n = n^2$
6. Berechne die ersten sechs Glieder der zur gegebenen Folge gehörigen Partialsummenfolge (s_n). Wie gross ist s_{100} ?
 - a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
 - b) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, ...
7. Überprüfe, ob es sich bei der Folge um eine AF handelt oder nicht. Falls ja, gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.
 - a) 1, 4, 5, 10, 13, ...
 - b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
 - c) -2, 3, 8, 13, 18, 25, ...
 - d) 12, 20, 28, 36, ...
 - e) 17, 14, 11, 9, 6, 3, 0, ...
 - f) 50, 40, 30, 20, 10, 0, -10, -20, ...
8. Berechne das 5. Glied der gegebenen AF.
 - a) $a_1 = 6, a_{n+1} = a_n + 8$
 - b) 3, 7, 11, 15, ...
 - c) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 7$
 - d) $a_1 = 34, d = 5$
9. Bestimme m so, dass die Folge $m, m^2 + 3, 4m^2 - 2m, \dots$ eine AF bildet.
10. Überprüfe, ob es sich bei der gegebenen Folge um eine geometrische Folge handelt oder nicht. Falls ja, gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.
 - a) 1, 4, 16, 64, 256, ...
 - b) 2, 3, 4.5, 6.75, 9, 13.5, ...
 - c) 2, 6, 18, 54, ...
 - d) -2, 6, -18, 54, -189, ...
 - e) 12, 6, 3, 1.5, ...
 - f) 10, -20, 40, -80, 160, ...
11. Berechne mit der Summenformel.
 - a) $32 + 48 + 72 + 108 + 162 + 243$
 - b) $2 - 6 + 18 - 54 + 162 - 486 + 1458 - 4374$
 - c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4096}{3}$
 - d) $\frac{5}{4} + \frac{5}{2} + 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640$
12. Berechne.
 - a) $6 + 2 + \frac{2}{3} + \dots$
 - b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \dots$
 - c) $200 + 120 + 72 + \dots$
 - d) $2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \dots$
13. Von einer geometrischen Reihe sind $a_5 = 0.0972$ und $q = 0.3$ bekannt. Berechne den Grenzwert s der unendlichen GR.
14. Von der GF (a_n) mit dem Quotienten q sind zwei Glieder gegeben. Berechne q und den Grenzwert s der dazugehörige unendlichen GR.
 - a) $a_5 = 1296; a_8 = \frac{2187}{4}$
 - b) $a_3 = \frac{80}{3}; a_6 = -\frac{640}{81}$

15. Bestimme der Quotienten q einer unendlichen GR, wenn über deren Grenzwert s folgendes bekannt ist:
- Der Grenzwert s ist 6-mal so gross wie das erste Glied der GR.
 - Der Grenzwert s ist 4.5-mal so gross wie das zweite Glied der GR.
16. Bestimme die drei anschliessenden Glieder der GF $4 \cdot \sqrt{2} - 4, 2 \cdot \sqrt{2} - 4, \dots$ und berechne, sofern vorhanden, den Grenzwert s der dazugehörigen GR.

Lösung

- $a_n = 2n$
 - $a_n = 7n + 1$
- $a_n = \frac{1}{n}$
 - $a_n = \frac{(-2)^n}{2n+1}$
- $a_{50} = \frac{99}{200}; a_{51} = \frac{101}{204}$
 - $a_{50} = \frac{52}{151}; a_{51} = \frac{53}{154}$
- $a_{n+1} = 2a_n + 1$ mit $a_1 = 6$
 - $a_{n+1} = 3a_n - 1$ mit $a_1 = 4$
- $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 36$
 - $a_{n+1} = a_n - 2$ mit $a_1 = -1$
 - $a_{n+1} = -3a_n$ mit $a_1 = -3$
 - $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 / (\sqrt{a_n} + 1)^2$ mit $a_1 = 1$
- $(s_n) = \{1; 4; 9; 16; 25; 36\}$ mit $s_{100} = 10'000$
 - $(s_n) = \{1; -1; 2; -2; 3; -3\}$ mit $s_{100} = -50$
- $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 1 / a_n = 3n - 2$
 - $a_{n+1} = a_n + 1$ mit $a_1 = 1 / a_n = n$
 - kein AF
 - $a_{n+1} = a_n + 8$ mit $a_1 = 12 / a_n = 8n + 4$
 - kein AF
 - $a_{n+1} = a_n - 10$ mit $a_1 = 50 / a_n = 60 - 10n$
- $a_5 = 38$
 - $a_5 = 19$
 - $a_5 = 33$
 - $a_5 = 54$
- $m_1 = -\frac{3}{2}$ und $m_2 = 2$
- $a_{n+1} = 4a_{n-1}$ mit $a_1 = 1 / a_n = 4^{n-1}$
 - kein GF
 - $a_{n+1} = 3a_{n-1}$ mit $a_1 = 2 / a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
 - kein GF
 - $a_{n+1} = 0.5a_{n-1}$ mit $a_1 = 12 / a_n = 12 \cdot 0.5^{n-1}$
 - $a_{n+1} = -2a_{n-1}$ mit $a_1 = 10 / a_n = 10 \cdot (-2)^{n-1}$
- 665
 - 3280
 - 2730
 - $\frac{5115}{4}$
- 9
 - $\frac{2}{3}$
 - 500
 - $3 + 3\sqrt{3}$
- 17.14
- $q = \frac{3}{4}; s = 16'384$
 - $q = -\frac{2}{3}; s = 36$
- $q = \frac{5}{6}$
 - $q_1 = \frac{1}{3}; q_2 = \frac{2}{3}$
- $a_3 = -2 + 2\sqrt{2}; a_4 = -2 + \sqrt{2}; a_5 = -1 + \sqrt{2}; s = -16 + 12\sqrt{2}$

2.2 Grenzwerte

Notation

$$a = \lim_{n \rightarrow x} a_n$$

Grenzwert, strebt gegen die Variable, Funktion

Definition

Eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert hat, nennt man **konvergent**, falls sie keinen Grenzwert hat, ist sie **divergent**.

Konvergente Folgen mit dem Grenzwert Null heissen **Nullfolgen**.

Rechenregeln für das Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

2.3 Definitionen

Der Funktionsbegriff

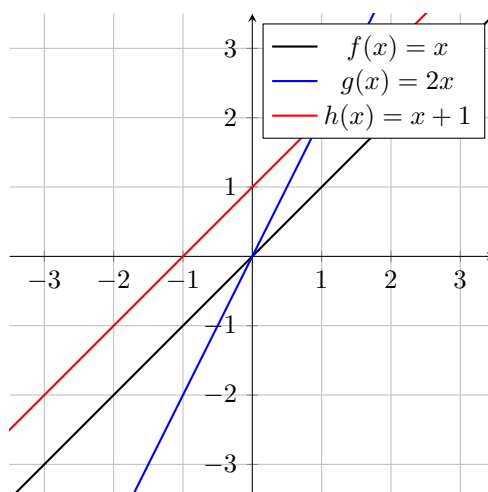
Ein wichtiges Thema der weiterführenden Mathematik ist die Diskussion von Funktionen. Es werden mit speziellen Hilfsmitteln Extrema, Nullstellen, Monotonieverhalten, usw. einer Funktion exakt bestimmt. Durch die Darstellung einer Funktion in einem Koordinatensystem können bereits einige dieser Eigenschaften ungefähr bestimmt werden. Es sollen zwei Darstellungsmethoden an folgender Funktion erläutert werden.

Direkte und indirekte Proportionalität

Direkte Proportionalität - Ein Zusammenhang der Form $y = mx$ heisst (direkte) Proportionalität (y ist proportional zu x). Der Koeffizient m heisst Proportionalitätskonstante bzw. Proportionalitätsfaktor. Eine Proportionalität kann durch eine Wertetabelle beschrieben werden, deren Zahlenpaare $(x; y)$ als Punkte im Koordinatensystem auf einer Geraden durch den Ursprung liegen. Der Quotient entsprechender Zahlenpaare $(x; y)$ ist immer gleich gross, als Gleichung notiert: $\frac{y}{m} = m$. Indirekte Proportionalität - Ein Zusammenhang der Form $y = \frac{c}{x} = c\frac{1}{x}$ heisst indirekte bzw. umgekehrte Proportionalität (y ist indirekt bzw. umgekehrt proportional zu x). c heisst Proportionalitätskonstante bzw. -faktor. Eine indirekte Proportionalität kann durch eine Wertetabelle beschrieben werden, deren Zahlenpaare $(x; y)$ als Punkte im Koordinatensystem auf einer Hyperbel liegen. Das Produkt entsprechender Zahlenpaare $(x; y)$ ist immer gleich gross, als Gleichung notiert: $xy = c$.

2.4 Lineare Funktionen

Graphische Darstellung



Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + q = y$$

Steigung m , y -Achsenabschnitt

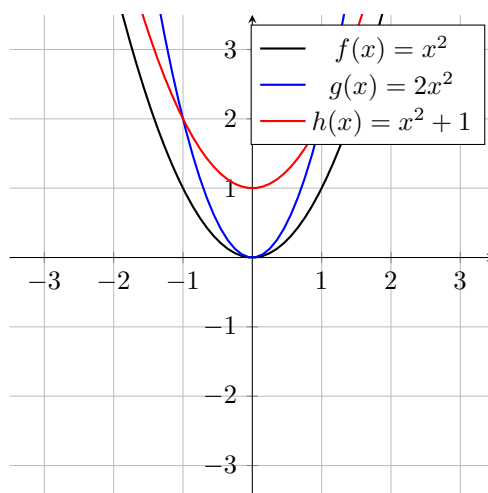
Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4.

Nullstelle berechnen

Die Funktionsgleichung wird nach 0 aufgelöst.

Gerade / Graph zeichnen

1. Markierung im **y-Achsenabschnitt**
2. **Steigung** einzeichnen
3. **y-Achsenabschnitt**spunkt und **Steigung**spunkt verbinden und...
4. ... Graph zeichnen

2.5 Quadratische Funktionen**Graphische Darstellung****Funktionsgleichung**

$$f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

Änderung der Öffnung, **Schnittstelle der y-Achse**

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4.

Scheitelpunktformel

$$\tilde{f}(x) = a(x - u)^2 + v = y$$

Name der Scheitelpunktform, **Verschiebung in x-Richtung (gegen Gefühl)**, **Verschiebung in y-Richtung**, „... $u)^2 + v$...“ → Definition des Scheitelpunkt (hoch 2)

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Umformung

Funktionsgleichung → Scheitelpunktformel:

$$c - \frac{b^2}{4a} = v$$

$$-\frac{b}{2a} = u$$

Funktionsgleichung → Scheitelpunktformel:

Gleichung vereinfachen.

Scheitelpunkt (Maximum / Minimum)

$$S(x; y) \hat{=} S\left(-\frac{b}{2a}; f(x)\right)$$

Name des Scheitelpunkts

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Wenn $a < 0$ ist, gibt es ein Maximum.

Wenn $a > 0$ ist, gibt es ein Minimum.

Parabel zeichnen

1. **Scheitelpunkt** und Nullstellen ausrechnen
2. Markierung **Schnittstelle der y-Achse**, **Scheitelpunkt** und Nullstellen verbinden und ...
3. ... Graph zeichnen (Symmetrie beachten)

Parameter des Graphs

- Bestimmung
 - Form / Aussehen: breit / schmall, nach oben / unten geöffnet
 - Scheitelpunkt: oberster / unterster Punkt der Parabel
 - Maximum: Scheitelpunkt im 1. oder 2. Quadrant
 - Minimum: Scheitelpunkt im 3. oder 4. Quadrant
 - Definitionsbereich (\mathbb{D}): Bereich der möglichen Lösungen
 - Wertebereich (\mathbb{W}): Bereich der Lösungen (mithilfe \mathbb{D} und Maximum / Minimum)
 - Nullstelle | Schnittstelle / Berührungsstelle der Parabel mit der x -Achse
- Änderung der Öffnung
 - $a > 1 \hat{=} \text{oben, eng}$
 - $1 > a > 0 \hat{=} \text{oben, breit}$
 - $a = \{1; -1\} \hat{=} \text{Normalparabel (oben / unten)}$
 - $0 > a > -1 \hat{=} \text{unten, breit}$
 - $a < -1 \hat{=} \text{unten, eng}$
- Diskriminante und Nullstellen
 - Diskriminante $< 0 \hat{=} \text{keine Nullstelle}$
 - Diskriminante $= 0 \hat{=} \text{eine Nullstelle (bzw. doppelte Nullstelle} \rightarrow x_1 = x_2)$
 - Diskriminante $> 0 \hat{=} \text{zwei Nullstellen}$

2.6 Potenzfunktionen

Graphische Darstellung

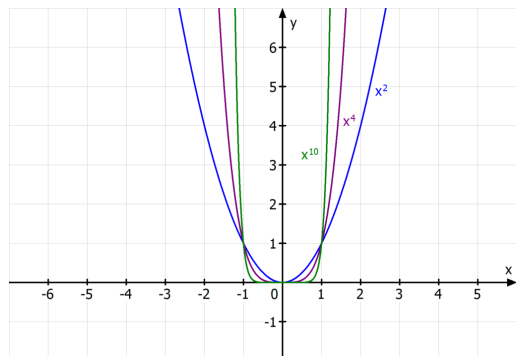


Abbildung 2.6.1: Potenzfunktion mit geraden Exponenten (positiv)

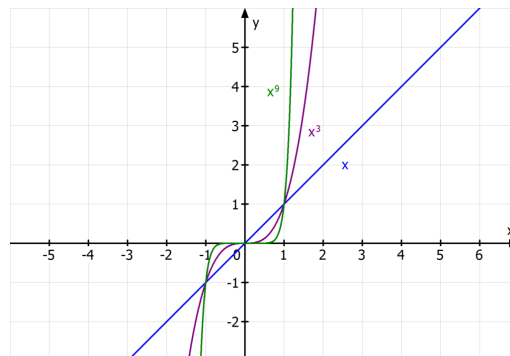


Abbildung 2.6.2: Potenzfunktion mit ungeraden Exponenten (positiv)

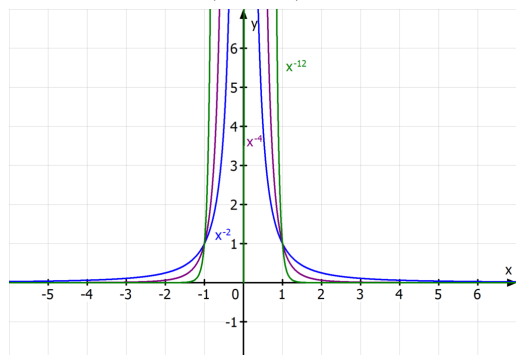


Abbildung 2.6.3: Potenzfunktion mit geraden Exponenten (negativ)

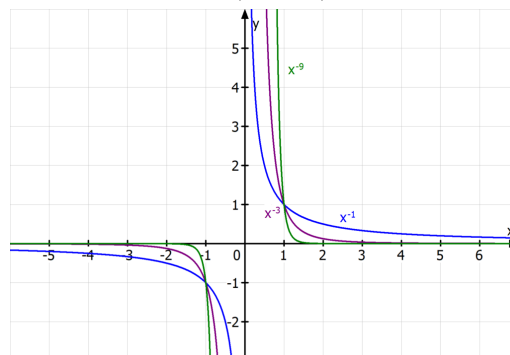


Abbildung 2.6.4: Potenzfunktion mit ungeraden Exponenten (negativ)

Funktionsgleichung

$$f(x) = ax^n = y$$

Variable im Exponent

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Scheitelpunktformel

$$\tilde{f}(x) = a(x - u)^n + v = y$$

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Umformung

Funktionsgleichung \rightarrow Scheitelpunktformel:
Gar nicht ausrechnen.

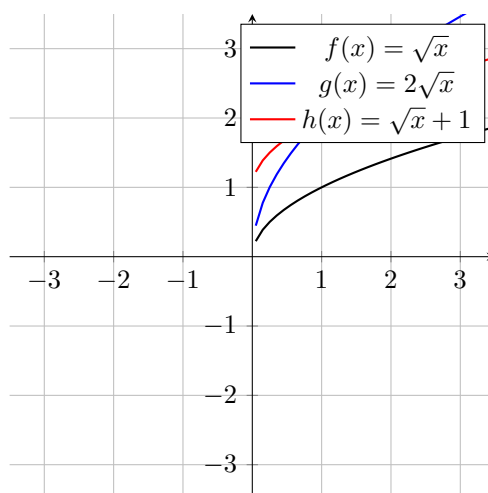
Scheitelpunktformel \rightarrow Funktionsgleichung:
Gleichung vereinfachen.

Der Exponent n

- gerade und positiv: $P_1(-1; 1)$, $P_2(1; 1)$, $N(0; 0)$, Achsensymmetrie
- ungerade und positiv: $P_1(-1; -1)$, $P_2(1; 1)$, $N(0; 0)$, Punktsymmetrie
- gerade und negativ: $P_1(-1; 1)$, $P_2(1; 1)$, keine Nullstellen, Achsensymmetrie
- ungerade und negativ: $P_1(-1; -1)$, $P_2(1; 1)$, keine Nullstellen, Punktsymmetrie

Graph zeichnen

1. Taschenrechner: `table > Add / Edit Func`
2. Funktionsgleichung eingeben (wenn nötig zweite Funktion eingeben)
3. **Start** → Anfang der Wertetabelle; **Step** → Differenzen zwischen den x -Koordinaten
4. x → Punkt auf den x -Koordinaten; $f(x)$ → Punkte auf den y -Koordinaten

2.7 Wurzelfunktionen**Graphische Darstellung****Funktionsgleichung**

$$f(x) = a \sqrt[n]{x} = y$$

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Scheitelpunktformel

$$\tilde{f}(x) = a \sqrt[n]{x - u} + v = y$$

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Umformung

Funktionsgleichung → Scheitelpunktformel:
Gar nicht ausrechnen.

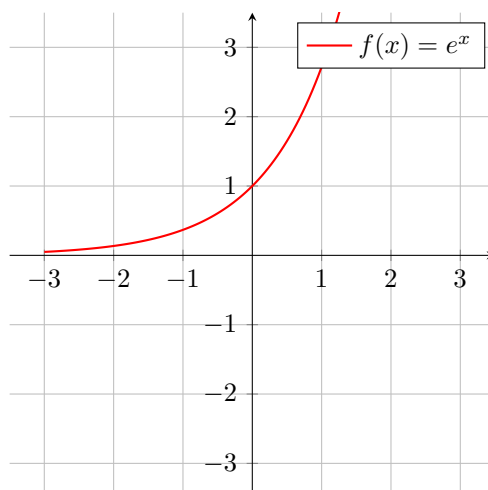
Scheitelpunktformel → Funktionsgleichung:
Gar nicht ausrechnen.

Die Skalierung a

- $a > 1 \hat{=}$ wachsende Öffnung
- $a = \{1; -1\} \hat{=}$ Normalform (oben / unten)
- $a < 1 \hat{=}$ sinkende Öffnung

Graph zeichnen

1. Taschenrechner: `table > Add / Edit Func`
2. Funktionsgleichung eingeben (wenn nötig zweite Funktion eingeben)
3. `Start` → Anfang der Wertetabelle; `Step` → Differenzen zwischen den x -Koordinaten
4. x → Punkt auf den x -Koordinaten; $f(x)$ → Punkte auf den y -Koordinaten

2.8 Exponentialfunktionen**Graphische Darstellung****Funktionsgleichung**

$$f(x) = c \cdot a^{nx} + d = y$$

Spiegelung an x -Achse, Steigung, Verschiebung in y -Richtung

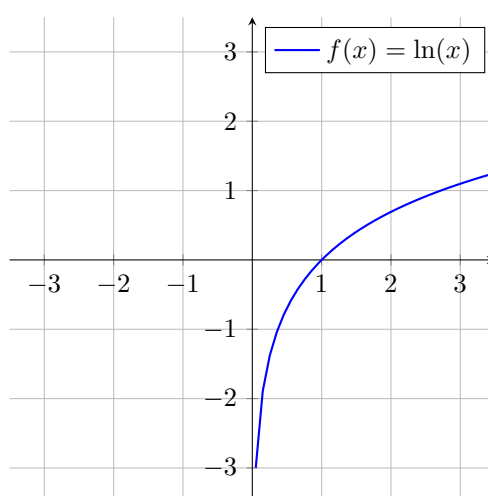
Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Parameter des Graphs

- Die Konstante c
 - $c < 0 \hat{=}$ Zunehmende Steigung im positiven Bereich
 - $c > 0 \hat{=}$ Zunehmende Steigung im negativen Bereich
- Der Faktor a
 - $0 < a < 1 \hat{=}$ Steigung im 2. Quadrant
 - $a > 1 \hat{=}$ Steigung im 1. Quadrant

Graph zeichnen

1. Taschenrechner: `table > Add / Edit Func`
2. Funktionsgleichung eingeben (wenn nötig zweite Funktion eingeben)
3. **Start** → Anfang der Wertetabelle; **Step** → Differenzen zwischen den x -Koordinaten
4. x → Punkt auf den x -Koordinaten; $f(x)$ → Punkte auf den y -Koordinaten

2.9 Logarithmusfunktionen**Graphische Darstellung****Funktionsgleichung**

$$f(x) = e^x = \ln(x) = y$$

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4 und Kapitel 2.5.

Umkehrfunktion: Exponential- und Logarithmusfunktion

- Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W}$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{D}$, wenn...
 - ... sie **injektiv** ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$)...
 - ... und **surjektiv** ($\forall y \in \mathbb{W} \exists x \in \mathbb{D}$ mit $f(x) = y$) ist.
 Wenn beide Bedingungen erfüllt werden ist es **bijektiv**.

Zum Teil lassen sich diese Eigenschaften durch Einschränken des Definitions - bzw. Wertebereichs erreichen.

- Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion erhält man, indem in der Funktionsgleichung x und y vertauscht werden und anschliessend nach y aufgelöst wird.
- Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegeln des Funktionsgraphen an der 1. Winkelhalbierenden.

Graph zeichnen

1. Taschenrechner: `table > Add / Edit Func`
2. Funktionsgleichung eingeben (wenn nötig zweite Funktion eingeben)
3. `Start` → Anfang der Wertetabelle; `Step` → Differenzen zwischen den x -Koordinaten
4. x → Punkt auf den x -Koordinaten; $f(x)$ → Punkte auf den y -Koordinaten

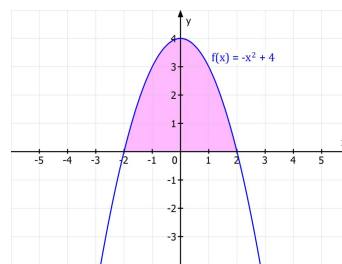
2.10 Integralfunktionen**Graphische Darstellung**

Abbildung 2.10.1: Integralfunktion (Beispiel)

Funktionsgleichung

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Für Erläuterung weiterer Parameter: siehe Kapitel 0.4, Kapitel 2.5 und 2.13.

Graph zeichnen

1. Taschenrechner: `table > Add / Edit Func`
2. Funktionsgleichung eingeben (wenn nötig zweite Funktion eingeben)
3. `Start` → Anfang der Wertetabelle; `Step` → Differenzen zwischen den x -Koordinaten
4. x → Punkt auf den x -Koordinaten; $f(x)$ → Punkte auf den y -Koordinaten

2.11 Aufgaben zu den Funktionen

Lineare Funktionen

1. Die Funktionsgleichungen $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = -x + 11$ sind gegeben
 - a) Bestimme den y -Achsenabschnitt von f .
 - b) Bestimme die Nullstelle von g .
 - c) Bestimme den Schnittpunkt S von f und g .
 - d) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die parallel zur y -Achse verläuft.
 - e) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die parallel zur x -Achse verläuft und durch S geht.
 - f) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die
 - i. parallel zu f verläuft.
 - ii. parallel zu f verläuft und durch den Ursprung geht.
 - iii. parallel zu f verläuft und g im Punkt $P(11; 0)$ schneidet.
 - iv. parallel zu f verläuft und g nie schneidet.
2. Für die folgenden Aufgaben werden immer noch die beiden linearen Funktionen aus der Aufgabe 1 verwendet. Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die
 - a) g im Punkte $Q(-1; 12)$ schneidet.
 - b) parallel zu g verläuft und die Nullstelle an der Stelle $x = -5$ hat.
 - c) f und g nie schneidet.
 - d) den y -Achsenabschnitt $y = -23$ hat und g nie schneidet.
 - e) g in den Punkten $R(-2; 16)$ und $T(3; 6)$ schneidet.
3. Gib ein Beispiel für die Funktionsgleichung einer
 - a) linearen Funktion ohne Nullstelle.
 - b) linearen Funktion mit einer Nullstelle.
 - c) linearen Funktion mit zwei Nullstellen.
 - d) linearen Funktion mit einem linearen Koeffizienten $\neq 0$ und keiner Nullstelle.
 - e) linearen Funktion mit einem y -Achsenabschnitt $\neq 0$ und keiner Nullstelle.
 - f) linearen Funktion mit einem y -Achsenabschnitt $\neq 0$ und keiner Nullstelle.
4. Gib ein Beispiel für die Funktionsgleichungen zweier
 - a) sich schneidender linearer Funktionen.
 - b) sich nicht schneidender linearer Funktionen.
 - c) sich nicht schneidender linearer Funktionen mit unterschiedlicher Steigungen.
 - d) sich schneidender linearer Funktionen, welche beide je genau eine Nullstelle haben.
 - e) sich schneidender linearer Funktionen, von welchen nur eine eine Nullstelle hat.
 - f) sich schneidender linearer Funktionen, welche beide keine Nullstelle haben.
5. Die folgenden Funktionen sind gegeben $f(x) = -4x + 2$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 6$ und $h(x) = 3x$
 - a) Berechne die Funktionswerte
 - i) $f \circ g(4)$
 - ii) $h \circ g(8)$
 - iii) $f \circ g \circ h(12)$

- b) Bestimme die Argumente
- $f(x) = 2$
 - $g(x) = 0$
 - $h \circ h(x) = 2$
- c) Bestimme die Steigung und den Achsenabschnitt von $g \circ f(x)$.
- d) Bestimme den Schnittpunkt S von f und g .
- e) Bestimme die Funktionsgleichung $r(x)$ einer Geraden, die
- parallel zu g verläuft.
 - parallel zu g verläuft und den Achsenabschnitt $y = 4$ hat.
 - parallel zu g verläuft und die Nullstelle $x = 4$ hat.
 - f und g schneidet.
 - f und g schneidet und h nicht schneidet.
 - f schneidet und g und h nicht schneidet.
 - f , g und h schneidet.
 - f , g und h nicht schneidet.
6. Gegeben sind die folgenden Punkte $A(-2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(0; -17)$
- Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden durch die Punkte A und B .
 - Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden durch den Punkte C mit der Steigung -1 .
 - Bestimme die Koordinaten eines Punktes, der auf der Geraden durch B und C liegt.

Quadratische Funktionen

7. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ wird
- um 1 nach rechts,
 - um 1 nach links,
 - um 1 nach oben,
 - um 1 nach unten verschoben.
- Bestimme jeweils die zugehörige Funktionsgleichung.
8. Die Funktion $f(x) = (x - d)^2$ nimmt für -1 und 9 denselben Funktionswert an.
- Mit welchem Argument hat diese Funktion den kleinsten Funktionswert?
 - An welcher Stelle hat diese Funktion den grössten Funktionswert?
9. Bestimme die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion (in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$), welche die folgenden Bedingungen erfüllt!
- Der Graph ist einen Normalparabel.
 - Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel.
 - Der Graph ist eine nach oben geöffnete, schlanke Parabel
 - Der Graph ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-3; 2)$.
 - Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
 - Der Graph ist eine breite nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0; 2)$
 - Der Graph ist eine Normalparabel mit nur einer Nullstelle in $x = 3$.

10. Bestimme die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion welche
- an der Stelle $x = 4$ maximal ist.
 - an der Stelle $x = 4$ maximal ist und einen breiten Graphen hat.
 - an der Stelle $x = 4$ maximal ist, einen breiten Graphen hat und durch den Ursprung geht.
 - Bestimme in der Aufgabe (c) die zweite Nullstelle. Was fällt auf?
11. Wie gross ist das Maximum von gh für das Zahlenpaar $(g; h)$, welches die Bedingung $2g+3h = 5$ erfüllt?
12. Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (das ist ein Quader mit einer quadratischen Grundfläche) misst 24 cm. Berechne die Kanten so, dass die Oberfläche maximal wird.
13. Bestimme k so, dass die Funktionen
- $f(x) = 3x^2 + kx + 27$ und
 - $g(x) = 6x^2 - 5kx - k^2$
- keine, genau eine oder zwei Nullstellen haben.
14. Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass
- die Funktion die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ hat.
 - die Funktion die Nullstellen $x_{1, 2} = \pm 3$ hat.
 - die Funktion die doppelte Nullstelle $x_1 = x_2 = -5$ hat.
 - die Funktion die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 6$ hat.

Potenzfunktionen

15. Der Graph G der Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3$ wird innerhalb des Koordinatensystems gemäss den nachfolgenden Vorgaben parallel verschoben. Bestimme die Gleichung der Funktion f° , die zum parallel verschobenen Graphen G° gehört.
- G wird um 2 Einheiten in y -Richtung nach oben verschoben.
 - G wird um 3 Einheiten in x -Richtung nach rechts verschoben.
 - G wird um 4 Einheiten nach links und um eine Einheit nach unten verschoben.
16. Für welchen Wert von $n \in \mathbb{N}$ verläuft der Graph zu $y = x^{-n}$ durch den Punkt $Q(x; y)$?
- $Q(-1; -1)$
 - $Q(-1; 1)$
 - $Q(1; -1)$
 - $Q(0; 0)$
17. Der Graph G der Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 3x^{-3}$ wird innerhalb des Koordinatensystems gemäss den nachfolgenden Vorgaben parallel verschoben. Bestimme die Gleichung der Funktion f° , die zum parallel verschobenen Graphen G° gehört.
- G wird um 3 Einheiten in y -Richtung nach oben verschoben.
 - G wird um 4 Einheiten in x -Richtung nach rechts verschoben.
 - G wird um 2 Einheiten nach links und um eine Einheit nach unten verschoben.

Wurzelfunktionen

18. Die Punkte $P(\sqrt{2}; y_P)$, $Q(2^{0.1}; y_Q)$ und $R(\frac{\pi}{4}; y_R)$ liegen auf der Kurve mit der Gleichung $y = k(x) = 2^x$. Berechne die y -Koordinaten je auf 4 gültige Ziffern.

Exponentialfunktionen

19. Bestimme für jede der Funktionen den Schnittpunkt mit der y -Achse, die Asymptote und die Wertemenge.

a) $f(x) = 1.2^x$

b) $g(x) = 2 \cdot 0.6^x$

c) $h(x) = 2^x + 3$

20. Entscheide, welche der angegebenen Funktionsgleichungen eine exponentiell fallende und welche eine exponentiell wachsende Funktion darstellen:

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \quad h(x) = 1.05^x \quad k(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad g(x) = 4^x \quad i(x) = 0.96^x$$

Logarithmusfunktionen

21. Untersuche die Funktion $f(x) = \log_2(x)$ auf Definitionsbereich, Asymptote, Schnittpunkt mit x - und y -Achse.

Integralfunktionen

22. Integriere.

a) $\int_0^2 4x^3 dx$

b) $\int_3^5 \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx$

c) $\int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$

d) $\int_1^3 \left(4x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$

e) $\int_1^4 3\sqrt{x} dx$

f) $\int_0^1 x\sqrt{x} dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$

i) $\int_{-1}^1 e^{x+1} dx$

j) $\int_0^2 (e^x - x^e) dx$

k) $\int_0^5 (2x - 3)^4 dx$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) dx$

m) $\int_0^5 \frac{2}{3} e^{4x} dx$

n) $\int_{12}^{24} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

o) $\int_{-1}^5 |x| dx$

Lösungen

- $f(x) = mx + q$ dabei entspricht q dem Achsenabschnitt $\Rightarrow y = -5$.
 - $g(x) = -2x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 11$
 - $3x - 5 = -x + 11 \Rightarrow x_S = 4 \Rightarrow S(4; 7)$
 - die x -Achse hat die Steigung $m = 0$, daher folgt in allgemeiner Form $h(x) = q$ mit $q \in \mathbb{R}$.
 - die x -Achse hat die Steigung $m = 0$, daher muss $q = 7$ sein. Also $h(x) = 7$.
 - parallel bedeutet, dass die Steigung gleich bleiben muss. Also $m_h = m_f = 3$, der Achsenabschnitt q kann beliebig $q \neq -5$ sein, daher z.B. $h(x) = 3x + 2$
 - q beschreibt die y -Koordinate des y -Achsen Schnittpunkts. Der Ursprung hat die Koordinaten $(0; 0)$ also folgt $q = 0$. $h(x) = 3x + 0 = 3x$
 - $h(11) = 3 \cdot 11 + q = 0 \Rightarrow q = -33 \Rightarrow h(x) = 3x - 33$
 - da sich f und g schneiden, wird sich auch jede parallele zu f mit g schneiden.
- $h(x) = 3x + 8$

- b) $h(x) = -x + 5$
- c) f und g schneiden sich, daher gibt es keine Gerade, welche parallel zu beiden sein kann.
- d) g nicht schneidet bedeutet parallel zu g , also $h(x) = -x - 23$
- e) Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt, in keinem Punkt, wenn sie parallel sind, oder in unendlich vielen Punkten, wenn sie identisch sind. In genau zwei Punkten geht nicht.
3. a) Keine Nullstelle bedeutet parallel zur x -Achse, daher z.B. $h(x) = 5$
- b) Genau eine Nullstelle bedeutet, dass die x -Achse geschnitten wird, also $m \neq 0$ sein muss. z.B. $h(x) = -3x + 6$
- c) Genau zwei Nullstellen geht nicht, da sich zwei Geraden in einem, keinem oder unendlich vielen Punkten schneiden.
- d) Der lineare Koeffizienten entspricht der Steigung, wenn diese $m \neq 0$ sein soll, schneidet sie die x -Achse, daher hat sie auch eine Nullstelle. Ist also nicht möglich.
- e) z.B. $h(x) = -6$
- f) $q = 0$ bedeutet, dass die Gerade durch den Ursprung geht. Das bedeutet die Gerade hat einen gemeinsamen Punkt mit der x -Achse also eine Nullstelle. Ist also nicht möglich.
4. a) Sobald die Steigung der beiden Funktionen nicht gleich ist, schneiden sie sich.
- b) Die Steigung muss identisch sein, dann sind die Geraden parallel, oder sogar identisch.
- c) Geht nicht
- d) Die Steigungen dürfen nicht identisch sein. Zudem darf die Steigung nicht 0 sein, so schneidet sie die x -Achse in genau einem Punkt.
- e) Differierende Steigungen, bei einer Funktion muss die Steigung 0 sein, der Achsenabschnitt jedoch $\neq 0$.
- f) Keine Nullstelle bedeutet parallel zur x -Achse, das wiederum bedeutet Steigung 0. Somit hätten beide dieselbe Steigung, sind also Parallel oder Identisch.
5. a) i) 18
ii) -6
iii) -46
- b) i) $x = 0$
ii) $x = 3$
iii) $x = \frac{2}{9}$
- c) $m = -2, q = 26$
- d) $S\left(\frac{16}{9}; -\frac{46}{9}\right)$
- e) i) z.B. $r(x) = \frac{1}{2}x + q$ mit $q \neq -6$
ii) $r(x) = \frac{1}{2}x + 4$
iii) $r(x) = \frac{1}{2}x - 2$
iv) $m \neq \frac{1}{2}, -4$
v) $m = 3$
vi) da $g \nparallel h$, geht das nicht.
vii) $m \notin \{-4; \frac{1}{2}; 3\}$
viii) da $g \nparallel h \nparallel f$ nicht möglich.
6. a) $g(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$
- b) $h(x) = -x - 17$

- c) $i(x) = 18x - 17 \Rightarrow$ z.B. (2; 19)
7. a) $f(x) = (x - 1)^2$
b) $f(x) = (x + 1)^2$
c) $f(x) = x^2 + 1$
d) $f(x) = x^2 - 1$
8. a) $f(x) = (x - 4)^2, x_1 = 4$
b) Keine Lösung, nach oben offen
9. a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x^2$
c) $f(x) = ax^2, a > 1$
d) $f(x) = (x + 3)^2 + 2$
e) $f(x) = (x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
g) $f(x) = (x - 3)^2$
10. a) z.B. $f(x) = -x^2 + 8x + \dots$
b) z.B. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + \dots$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$
d) $x_1 = 0 \vee x_2 = 8$
11. Maximum bei $\frac{25}{24}$
12. Oberfläche: $2x^2 + 4xy, x = 2, y = 2$
13. a) $k \in [-18; 18], 1.$ Lsg. für $k \pm 18, 2.$ Lsg. sonst.
b) 1. Lsg. für $k = 0, 2.$ Lsg. sonst.
14. a) z.B. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) z.B. $f(x) = x^2 - 9$
c) z.B. $f(x) = x^2 + 10x + 25$
d) z.B. nur zwei Nullstellen
15. a) $y = f^\circ(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$
b) $y = f^\circ(x) = \frac{1}{3}(x - 3)^3$
c) $y = f^\circ(x) = \frac{1}{3}(x + 4)^3 - 1$
16. a) Für ungerades n
b) Für gerades n
c) Für kein $n \in \mathbb{N}$
d) Für kein $n \in \mathbb{N}$
17. a) $y = f^\circ(x) = 3x^{-3} + 3$
b) $y = f^\circ(x) = 3(x - 4)^{-3}$
c) $y = f^\circ(x) = 3(x + 2)^{-3} - 1$
18. $y_P = 2^{\sqrt{2}} = 2.665; y_Q = 2^{(2^{0.1})} = 2^{\sqrt[10]{2}} = 2.102; y_R = 2^{\frac{\pi}{4}} = 1.724$
19. a) $f(0) = 1$

2.12 Differentialrechnung

Mit der ersten Ableitung $f'(x)$ berechnet man die **Steigung** an einer Stelle des Graphs.
Mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ berechnet man die **Krümmung** an einer Stelle des Graphs.

Differenzenquotient / Differenzialquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die Ableitungsregeln

1. Ableitungsregel (Potenzregel):

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$

2. Ableitungsregel (Summen- und Differenzenregel):

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

3. Ableitungsregel (Faktorregel):

$$(cf)' = cf'$$

4. Ableitungsregel (Produktregel):

$$(fg)' = f'g + fg'$$

5. Ableitungsregel (Quotientenregel):

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

6. Ableitungsregel (Kettenregel):

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Trigonometrische Funktionen

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

- Umkehrfunktionen¹

$$(f^{-1}f(x))' = \frac{1}{f'(x)}$$

- Logarithmusfunktionen

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

- Exponentialfunktionen

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

¹Umkehrfunktionen sind Ursprungsfunktionen, die an der Winkelhalbierenden (schiefe Asymptote) gespiegelt werden.

Tangente am GraphenTangente an einen Kurvenpunkt, geg.: $f(x) = \sqrt{2x+2}$ und $x = 1$

1. Ermittlung der
- y
- Koordinate des Punktes

$$f(1) = \sqrt{2 \cdot 1 + 2} = 2$$

2. Bestimmung der Tangentensteigung

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 2}} = \frac{1}{2} = m_t$$

3. Gleichung der Tangente
- t

$$t(x) = \frac{1}{2}x + q_t$$

$$t(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + q_t = 2$$

$$q_t = \frac{3}{2} \Rightarrow t(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

Tangente von einem gegebenen Punkt, geg.: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $P(-1; -2)$

1. Berührungspunkt

$$B(b; f(b)) = B\left(b; \frac{1}{4}b^2\right)$$

2. Tangentensteigung auf zwei Arten ansetzen (
- $f'(x)$
- &
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
-)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \frac{\frac{1}{4}b^2 - (-2)}{b - (-1)} = \frac{\frac{1}{4}b^2 + 2}{b + 1}$$

$$\frac{1}{2}b = \frac{\frac{1}{4}b^2 + 2}{b + 1}$$

$$b_1 = -4 \quad b_2 = 2$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \cdot (-4) = 2$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \cdot (2) = 1$$

3. Gleichung der Tangente
- t
- und
- s

$$t(x) = -2x + q_t$$

$$-2 = -2(-1) + q_t$$

$$-4 = q_t$$

$$t(x) = \underline{\underline{-2x - 4}}$$

$$s(x) = x + q_s$$

$$-2 = -1 + q_s$$

$$-1 = q_s$$

$$s(x) = \underline{\underline{x - 1}}$$

Tangente mit gegebener Steigung, geg.: $f(x) = x^3$ und $m = \frac{4}{3}$

1. $f'(x) = m$ gleichsetzen

$$f'(x) = 3x^2 = \frac{4}{3} = m$$

$$x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

2. Berührungspunkte berechnen

$$B_1 \left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{27} \right)$$

$$B_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{27} \right)$$

3. Gleichung der Tangenten

$$t(x) = \frac{4}{3}x + q_t$$

$$s(x) = \frac{4}{3}x + q_s$$

$$t\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + q_t = -\frac{8}{27}$$

$$s\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} + q_s = \frac{8}{27}$$

$$\frac{16}{27} = q_t$$

$$-\frac{16}{27} = q_s$$

$$t(x) = \underline{\underline{\frac{4}{3}x - \frac{16}{27}}}$$

$$s(x) = \underline{\underline{\frac{4}{3}x - \frac{16}{27}}}$$

Schnittwinkel, geg.: $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{7}{3}$ und $g(x) = x^2$

1. Ermittlung der Schnittpunkte

$$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{7}{3} = x^2$$

$$0 = 7x^2 - 7x - 14$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$S_1(-1; 1) \quad S_2(2; 4)$$

2. Ermittlung der Steigung in den Schnittpunkten

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$m_{f_1} = f'(-1) = \frac{3}{2}$$

$$m_{g_1} = g'(-1) = -2$$

$$m_{f_2} = f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$m_{g_2} = g'(2) = 4$$

3. Ermittlung der Schnittwinkel mithilfe $\phi = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

$$\phi_1 = \arctan\left|\frac{\frac{3}{2} - (-2)}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-2)}\right| \approx \underline{\underline{60.26^\circ}}$$

$$\phi_2 = \arctan\left|\frac{\frac{1}{2} - 4}{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}\right| \approx \underline{\underline{49.40^\circ}}$$

Kurvendiskussion

Definitionsmenge	Bei gebrochen-rationalen und Wurzelfunktionen: $\mathbb{D} =] - \infty; x_1] \cup [x_2; \infty[\mid \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ Nenner $\neq 0 \mid$ Radikant ≥ 0
Symmetrie	Gerade Funktion / y-Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$ Ungerade Funktion / Ursprungssymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
Nullstellen	$f(x) = 0$ (ggf. mit Horner-Schema)
Polstellen	Bei gebrochen-rationalen Funktionen (im Nenner): $f(x) = 0 \hat{=}$ vertikale Asymptoten Graph an der Polstelle... ... verreisst: mvzw ... verreisst nicht: ovzw Vorzeichenwechsel $\hat{=}$ von links / rechts die Polstelle annähern und beide Vorzeichen vergleichen
Asymptoten	Bei gebrochen-rationalen Funktionen: Gradunterschiede $\hat{=}$ Art der Asymptote Gerade / Parabel / ... Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom Asymptote $\hat{=}$ x-Achse / horizontale Asymptote Grad Zählerpolynom = Grad Nennerpolynom Koeffizienten der Variable des höchsten Grades Ansonsten: Polynomdivision
Asymptoten	Bei Wurzelfunktionen: Quadratische Variabel mit Quadratwurzel $\hat{=}$ schräge Asymptote Grenzwert unbestimmt $\hat{=}$ Regel von L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ Ansonsten: Erraten
Grenzwertanalyse	Bei Exponentialfunktionen: x gegen $\pm\infty$ streben lassen und Asymptote $a(x)$ bzw. Graph zeichnen $\pm\infty$

Tabelle 2.12.1: Kurvendiskussion: Kochbuch Teil I

Extremalstellen	$f'(x) = 0 \begin{cases} \text{Tiefpunkt: } f''(x) > 0 \\ \text{Wendepunkt: } f''(x) = 0 \\ \text{Hochpunkt: } f''(x) < 0 \end{cases}$
Terassenpunkt	$f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$
Intervall	<p>Bei trigonometrischen Funktionen: TR-Intervall (bei sin & tan): $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ Optimales Intervall: $[0; 2\pi]$</p> <p>Sinus: $\phi_{\text{TR}} = \phi_1 > 0$, d.h.: $\phi_1; \phi_2 = \pi - \phi_1$ $\phi_{\text{TR}} < 0$, d.h.: $\phi_1 = 2\pi + \phi_{\text{TR}}; \phi_2 = \pi - \phi_{\text{TR}}$</p> <p>Cosinus: $\phi_1 = \phi_{\text{TR}}$ $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$</p> <p>Tangens: $\phi_{\text{TR}} = \phi_1 > 0$, d.h.: $\phi_1; \phi_2 = \pi + \phi_1$ $\phi_{\text{TR}} < 0$, d.h.: $\phi_1 = \pi + \phi_{\text{TR}}; \phi_2 = \pi + \phi_1$</p> <p>Intervall beachten bei der Berechnung von Punkten / Stellen!</p>
Form / Graph	1) in passendes Koordinatensystem Berechnetes richtig eintragen 2) Gezeichnetes richtig (nach eigenen Angaben) interpretieren 3) zur Not auf Form der Grundfunktionen basieren

Tabelle 2.12.2: Kurvendiskussion: Kochbuch Teil II

Differentialzusammenhänge

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
Nullstelle	= 0	-	-
Einfache Nullstelle	= 0	$\neq 0$	-
Doppelte Nullstelle	= 0	= 0	$\neq 0$
Dreifache Nullstelle	= 0	= 0	= 0
Extremalstelle	-	= 0	$\neq 0$
Wendestelle	-	-	= 0
Terassenpunkt	-	= 0	= 0

Tabelle 2.12.3: Übersicht der Differentialzusammenhänge

Krümmungsverhalten

$f''(x) < 0$	Rechtskrümmung
$f''(x) = 0$	Wendestelle
$f''(x) > 0$	Linkskrümmung

Monotonie

$f(x_2) \geq f(x_1)$	monoton
$f(x_2) > f(x_1)$	streng monoton

Kurvenrekonstruktion

Basics	
Geht durch Punkt $(x; y)$	$f(x) = y$
Geht durch den Ursprung	$f(0) = 0$
Berührt die x-Achse	$f(x) = 0 \mid f'(x) = 0$
Schneidet die x-Achse	$f(x) = 0$
Schneidet die y-Achse	$f(0) = y$
Punkte / Stellen	
Extremalstelle an der Stelle x	$f'(x) = 0$
Geht durch Extremalstelle $(x; y)$	$f(x) = y \mid f'(x) = 0$
Wendepunkt an der Stelle x	$f''(x) = 0$
Geht durch Wendepunkt $(x; y)$	$f(x) = y \mid f''(x) = 0$
Terassenpunkt an der Stelle x	$f'(x) = 0 \mid f''(x) = 0$
Geht durch Terassenpunkt $(x; y)$	$f(x) = y \mid f'(x) = 0 \mid f''(x) = 0$
Tangente / Normale / Gerade	
Tangente an der Stelle x mit Gleichung $t(x)$	$f(x) = t(x) \mid f'(x) = t'(x)$
Tangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = m$
Waagrechte Tangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = 0$
Wendetangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = m \mid f''(x) = 0$
Normale an Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = -\frac{1}{m_n}$
Tangente an der Stelle x , die an Gerade $g(x)$ parallel ist	$f'(x) = g'(x)$
Symmetrie	
Graph hat Ursprungssymmetrie	Term mit Variablen gerader Ordnung streichen
Graph hat y-Achsensymmetrie	Term mit Variablen ungerader Ordnung streichen

Tabelle 2.12.4: Kurvendiskussion: Wörterbuch für Funktionsdetektion

Beispiel: Eine zum Ursprung symmetrische Polynomfunktion 5.Grades geht durch $P(1;3)$ und berührt die x -Achse bei $x = -2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Notieren: $f(x), f'(x), f''(x)$

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \quad \text{Ursprungssymmetrie}$$

$$f(x) = ax^5 + cx^3 + ex$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3cx^2 + e$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6cx$$

2. Anzahl Variablen $(a, b, c, d \dots) \hat{=}$ Anzahl Bedingungen (I, II, III, IV...)

$$\text{I } f(1) = 3 \quad 3 = a + c + e$$

$$\text{II } f(-2) = 0 \quad 0 = -32a - 8c - 2e = 16a + 4c + e$$

$$\text{III } f'(-2) = 0 \quad 0 = 80a + 12c + e$$

3. Gleichungssystem mit Variablen und mit x -Werten eingesetzten Bedingungen

$$\text{I } a = 3 - c - e = 3 - \left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{16}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{II } 0 = 16(3 - c - e) + 4c + e$$

$$\text{III } 0 = 80(3 - c - e) + 12c + e$$

$$\text{II } -48 = -12c - 15e = -12c - 15 \cdot \frac{16}{3} \Rightarrow c = -\frac{8}{3}$$

$$\text{III } -240 = -68c - 79e$$

$$\text{II } 4080 = 1020c + 1275e$$

$$\text{III } -3600 = -1020c - 1185e$$

$$\text{II } + \text{III } 90e = 480 \Rightarrow e = \frac{16}{3}$$

Optimierungsprobleme (Beispiel)

Die Firma Hag hat den Auftrag, ein Areal einzuzäunen. Es sollen insgesamt $400m$ Zaun so aufgestellt werden, dass die *rechteckige*, eingezäunte Fläche *maximal* wird. Zwischen den Punkten A und B sind bereits $a = 120m$ der 400 Meter gebaut.

Zeige, dass die Funktionen $A(x) = 9600 - 40x - x^2$ der umzäunten Fläche in Abhängigkeit von x entspricht.

1. Ansatz erstellen (Werte u. Grössen, die fürs Lösen der Aufgabe relevant sind)
2. Skizze anfertigen (am besten zweidimensional)
3. Hauptbedingungen (als Funktion) formulieren

$$\text{HB: } A(a; b; x) = (a + x)b$$

4. Nebenbedingung formulieren

$$\text{NB: } U(a; b; x) = 2(a + x) + 2b = 400$$

$$2b = 400 - 2(a + x)$$

$$b = 200 - a - x = 80 - x$$

5. Zielfunktionen zusammenstellen

$$\text{ZF: } Z(a; x) = (a + x)(80 - x)$$

$$= 80a + 80x - xa - x^2$$

$$Z(x) = 9600 + 80x - 120x - x^2$$

$$= 9600 - 40x - x^2$$

6. Extremwert/e ermitteln

$$Z'(x) = -40 - 2x$$

$$= -40 - 2x = 0$$

$$x = -20 \frac{1}{2}$$

7. Randwerte überprüfen (bei Intervallen) $\Rightarrow [0; 80]$, weil $l + b = l + b$, d.h. $200m = 200m \Rightarrow 200m - 120m = 80m$

$$Z(0) = 9600m^2$$

$$Z(80) = 0 \quad \checkmark$$

8. Sinnhaftigkeit logisch kontrollieren + Aufgabe entsprechender Antwort geben

Stereometrie für Optimierungsprobleme:

Dreieck	Quadrat	Rechteck
$A = \frac{1}{2}ah$	$d = \sqrt{2}a$ $A = a^2$	$d_{1,2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $A = ab$
Kreis	Würfel	Quader
$u = 2\pi r$ $A = \pi r^2$	$d = \sqrt{3}a$ $S = 6a^2$ $V = a^3$	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $S = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$
Spat	Gerader Kreiszylinder	Tetraeder
$V = G \cdot h$	$M = 2\pi rh$ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}Gh$
Kugel	A: Fläche S: Oberfläche M: Mantelfläche G: Grundfläche V: Volumen	abc: Seitenlänge d: Diagonale u: Umfang h: Höhe r: Radius
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $M = 4\pi r^2$		

2.13 Integralrechnung

Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$c, c \in \mathbb{R}$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1) = x(\log_a x - \log_a(e))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Tabelle 2.13.1: Stammfunktion aller Elementarfunktionen

Unbestimmte Integrale

Ist F eine Stammfunktion von f , so heisst die Menge aller Stammfunktionen das **unbestimmte** Integral von f :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

\int heisst *Integralzeichen*, $f(x)$ ist der *Integrand*, dx das *Differential* und C heisst *Integrationskonstante*.

Weitere Regeln:

Partielle Integration: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Faktorregel: $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$

Summenregel: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Bestimmte Integrale: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\text{Wenn } F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'_a(x) = f(x)$$

$$\text{Wenn } F \hat{=} \text{ eine beliebige Stammfunktion} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Weitere Regeln:

$$\text{Integrationsgrenzen: } \int_a^b f(x)dx, \quad a \leq x \leq b$$

$$\text{Vertauschen der Integrationsgrenzen: } \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{Aufteilen der Integrationsgrenzen: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\text{Sonderfall: } \int_a^a f(x)dx = 0$$

Flächenberechnung: Unter- (U_n) und Obersummen (O_n)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \underbrace{\Delta x}_{\frac{b-a}{n}}$$

Hilfreiche Summenformeln bei der Berechnung von Unter- und Obersummen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} & \sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \end{aligned}$$

Flächenberechnung: Zwischen einer Kurve und der x -Achse

$$A = \left| \int_a^{x_S} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_S}^b f(x)dx \right|$$

$x_S \hat{=} \text{ die einzige Nullstelle von } f \text{ in }]a; b[$

Flächenberechnung: Zwischen zwei Kurven

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))dx \right|$$

$x_{1,2,3} \hat{=} \text{ Schnittstellen der beiden Graphen}$

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

Wenn der Grenzwert der Fläche einen endlichen Wert hat (bspw. 2), ist die Fläche *konvergent* und wenn der Grenzwert $\pm\infty$ ist, ist die Fläche *divergent*.

Volumen von RotationskörpernRotation um die x -Achse:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

Rotation um die y -Achse:

$$V = \pi \int_c^d f^{-1}(x) \, dx$$

Ringförmige Rotationskörper (um die x -Achse):

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \, dx$$

Bedingung: $f(x) > g(x)$ Bei Rotation um die y -Achse wird die jeweilige Umkehrfunktion quadriert.**Substitutionsmethode**

Einfache Substitution:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b)$$

Mehrfache Substitution:

$$\int f(g(x))g'(x)dx \stackrel{g'(x)dx=du}{=} \int f(u)du = F(g(x))$$

Partielle Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

2.14 Aufgaben zur Infinitesimalrechnung**Differentialrechnung**

1. Bilde jeweils die erste Ableitung.

a) $f(x) = 12$

b) $f(x) = -9x$

c) $f(x) = x^{16}$

d) $f(x) = 3x - 10$

e) $f(x) = x^3 + 11$

f) $f(x) = -3\sqrt[5]{x}$

g) $f(x) = x^2(1 - 3x^2)$

h) $f(x) = (2x + 1)\sqrt[5]{x^2}$

i) $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$

j) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$

k) $f(x) = (2x^2 + 5x + 3)^2$

l) $f(x) = x^3(4x + \sqrt{x})$

m) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

n) $f(x) = \frac{1-2x}{3x+4}$

o) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$

p) $f(x) = (4 - 3x)^2$

q) $f(x) = (x^3 + 21)^{-4}$

r) $f(x) = \frac{10}{(10-x^{10})^{10}}$

2. Bilde jeweils die erste Ableitung.

a) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

b) $f(x) = e^{-x} + \frac{x}{e^x}$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{2}$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

e) $f(x) = 10^{\frac{2x}{x+1}}$

f) $f(x) = \frac{e^x}{x^2-4} + \pi^2$

g) $f(x) = \log_3(\cos(x))$

h) $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$

i) $f(x) = \sin(\ln(\cos(x)))$

3. Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 4$. Bestimme die Gleichung der Parabeltangente t im angegebenen Punkt P .

a) $P(3; y_P)$

b) $P(-2; y_P)$

4. Bestimme die Tangente und die Normale an den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3$ im Punkt $P(3; -6)$.

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 14x + 9$. In welchen Punkten des Graphen G_f ist die Tangente parallel zur Geraden $g: y = 10x - 8$?

6. Berechne den Parameterwert k so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = 2x^3 + kx - 3$ an der Stelle $x = 2$ die Steigung 4 hat.

7. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - 3x + 12x^2 - 8x^3$. Bestimme die Gleichung derjenigen Tangente t an den Graphen von f , welche parallel zur Tangente an der Stelle $x = 1$ ist.

8. Bestimme die Gleichungen der horizontalen Tangenten an den Graphen der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

9. Die Sehne s der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 2x + 3$ verbindet die beiden Kurvenpunkte $P(1; y_P)$ und $Q(3; y_Q)$. Bestimme die Gleichung der Parabeltangente t , die parallel zu dieser Sehne s verläuft.

10. In welchem Kurvenpunkt K wird der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{8}x^3$ von seiner Tangente t an der Stelle $x = -2$ geschnitten?

11. Diskutiere die Funktion.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

c) $f(x) = 2 - \frac{5}{2}x^2 + 4x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

e) $f(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2(x-2)$

f) $f(x) = (x-1)(x+2)^2$

g) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

h) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

12. Diskutiere die Funktion.

a) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

b) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

e) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

f) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

g) $f(x) = xe^{-x}$

h) $f(x) = e^x(x-1)^2$

i) $f(x) = x\ln(x)$

j) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

13. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $P(2; 1)$ einen Terrassenpunkt und schneidet die x -Achse im Punkt $A(4; 0)$. Bestimme die Funktionsgleichung.
14. Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades berührt die x -Achse bei $x = 0$. Im Punkt $T(3; 9)$ ist ein Terrassenpunkt. Bestimme die Funktionsgleichung.
15. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat einen Wendepunkt bei $W(1; 2)$ und berührt die x -Achse bei $x = 2$. Bestimme die Funktionsgleichung.
16. Bestimme eine Polynomfunktion 3. Grades mit einer Nullstelle bei $x = -2$. Der Punkt $P(0; y_P)$ ist ein Wendepunkt und die Wendetangente t hat die Gleichung $x - 3y + 6 = 0$.
17. Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion 5. Grades, deren zum Ursprung punktsymmetrischer Graph in $P(1; 8)$ einen Terrassenpunkt hat?
18. Eine zum Ursprung punktsymmetrische Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $M(3; -6)$ ein Minimum. Bestimme die Funktionsgleichung.
19. Der Graph einer zum Nullpunkt symmetrischen Polynomfunktion 5. Grades hat ein Extremum im Punkt $P(3; 6)$ und bei $x = 1$ die Steigung $m = \frac{40}{27}$. Bestimme die Funktionsgleichung.
20. Eine zur y -Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades verläuft durch den Ursprung und hat einen Wendepunkt bei $W(1; 2.5)$. Bestimme die Funktionsgleichung.
21. Der Graph einer zum Ursprung symmetrischen Polynomfunktion 5. Grades hat in $M(3; 6)$ ein Maximum und schneidet die x -Achse bei $x = \sqrt{15}$. Bestimme die Funktionsgleichung.
22. Eine zur y -Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades berührt bei $x = 4$ die x -Achse und schneidet die y -Achse bei 10.24. Bestimme die Funktionsgleichung.
23. Ein Rechteck hat den Umfang $u = 60\text{cm}$. Über beiden Schmalseiten und einer Längsseite werden Quadrate nach aussen errichtet. Bei welchen Abmessungen des Rechtecks ist die Summe der drei Quadratflächen extremal? Handelt es sich beim Extremum um ein Minimum oder ein Maximum?

24. Aus einem 120cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, bei dem eine Kante dreimal so lang wie eine andere und der Rauminhalt möglichst gross ist. Wie muss man die Länge der Kanten wählen? Wie gross ist das maximale Volumen?

Integralrechnung

25. Bilde jeweils die Stammfunktion.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $\int 4x \, dx$ | b) $\int x^3 \, dx$ |
| c) $\int x \, dx$ | d) $\int -\frac{3}{4}x^8 \, dx$ |
| e) $\int 1001 \, dx$ | f) $\int 0 \, dx$ |
| g) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$ | h) $\int 7\sqrt[4]{x^3} \, dx$ |
| i) $\int \sin(x) + \cos(x) \, dx$ | j) $\int 3\sin(x) - 2\cos(x) \, dx$ |
| k) $\int 2e^x \, dx$ | l) $\int 2^x \, dx$ |
| m) $\int \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \, dx$ | n) $\int \frac{3}{2}\log_4(x) \, dx$ |

26. Bilde jeweils das unbestimmte Integral.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a) $\int 1 \, dx$ | b) $\int 6x^3 \, dx$ |
| c) $\int (3x^2 - 1) \, dx$ | d) $\int (3x + 4)(x^2 - 1) \, dx$ |
| e) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$ | f) $\int \frac{2}{x^3} \, dx$ |
| g) $\int \left(\frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) \, dx$ | h) $\int \frac{x^3 - x + 5}{x} \, dx$ |
| i) $\int \sqrt{x}(x + 5) \, dx$ | j) $\int \sqrt{x} \, dx$ |
| k) $\int \cos(x) \, dx$ | l) $\int (1 + \tan^2(x)) \, dx$ |
| m) $\int (e^x + \sin(x)) \, dx$ | n) $\int 5^x \, dx$ |
| o) $\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \, dx$ | p) $\int \pi \cdot \ln(x) \, dx$ |
| q) $\int (x + \cos(x)) \, dx$ | r) $\int x^{1-2} \, dx$ |

27. Bilde jeweils das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz.

- | | |
|---|---|
| a) $\int_0^2 4x^3 \, dx$ | b) $\int_{-1}^2 (x^2 + 3) \, dx$ |
| c) $\int_2^4 \frac{1}{x^2} \, dx$ | d) $\int_1^2 \left(2x - \frac{2}{x}\right) \, dx$ |
| e) $\int_1^4 3\sqrt{x} \, dx$ | f) $\int_1^4 \sqrt{\frac{3}{x^3}} \, dx$ |
| g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx$ | h) $\int_0^{\pi} (4\sin(x) - 3\cos(x)) \, dx$ |
| i) $\int_{-1}^1 e^{x+1} \, dx$ | j) $\int_0^1 \pi \cdot e^x \, dx$ |
| k) $\int_{-1}^5 x \, dx$ | l) $\int_0^2 x^2 - 1 \, dx$ |

28. Berechne die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse.

a) $f(x) = -2x^2 + 18$

b) $f(x) = x(x^2 - 1)$

c) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

f) $f(x) = x + x^{-1} - 4$

29. Berechne die Fläche zwischen zwei Kurven.

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = 8 - x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = 16 - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ und
 $g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ und $g(x) = \sqrt{2x}$

30. Berechne das uneigentliche Integral, sofern es existiert.

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$

b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{2x+4}{x^3} dx$

d) $\int_2^{\infty} \frac{x^3-5}{x^6} dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx$

f) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx$

g) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3} dx$

h) $\int_3^{\infty} \frac{5+x}{x^3} dx$

i) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

j) $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$

k) $\int_{-\infty}^1 e^{2x+1} dx$

l) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

31. Der Graph, der mit der x -Achse eine endliche Fläche begrenzt, wird um die x -Achse rotiert. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

a) $f(x) = -x^2 + 4$

b) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = x^2(x + 2)$

d) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

e) $f(x) = x\sqrt{4-x}$

f) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

32. Bilde das unbestimmte Integral mit der einfachen Substitutionmethode.

a) $f(x) = (2x + 3)^5$

b) $f(x) = 7(3x - 1)^6$

c) $f(x) = (12 - x)^3$

d) $f(x) = (3 - \frac{1}{2}x)^3$

e) $f(x) = 12(3x - 9)^3$

f) $f(x) = (3 - x\sqrt{2})^2$

g) $f(x) = (4x + 3)^{-2}$

h) $f(x) = 2(1 - x)^{-3}$

i) $f(x) = (4 - \frac{1}{2}x)^{-4}$

j) $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^3}$

k) $f(x) = \frac{2}{(2-\frac{1}{3}x)^5}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

33. Bilde das unbestimmte Integral mit der einfachen Substitutionmethode.

a) $f(x) = (3x - 5)^6$

b) $f(x) = \frac{5}{3x-4}$

- | | |
|--|---------------------------------------|
| c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ | d) $f(x) = \sqrt[4]{ax+b}$ |
| e) $f(x) = x(x^2+1)^3$ | f) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ |
| g) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ | h) $f(x) = \frac{3x^3}{1+x^4}$ |
| i) $f(x) = 2xe^{x^2}$ | j) $f(x) = axe^{-bx^2}$ |
| k) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ | l) $f(x) = \frac{a}{x-b}e^{\ln(x-b)}$ |

34. Bilde das unbestimmte Integral mit der partiellen Integration.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = xe^x$ | b) $f(x) = (x-1)e^x$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$ | d) $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$ |
| e) $f(x) = xe^{2x}$ | f) $f(x) = (2x+2)e^{2x}$ |

Lösungen

- | | | |
|--|---|--|
| 1. a) $f'(x) = 0$ | b) $f'(x) = -9$ | c) $f'(x) = 16x^{15}$ |
| d) $f'(x) = 3$ | e) $f'(x) = 3x^2$ | f) $f'(x) = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$ |
| g) $f'(x) = 2x - 12x^3$ | h) $f'(x) = \frac{14x+2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ | i) $f'(x) = \frac{15\sqrt{x} \cdot x}{2}$ |
| j) $f'(x) = \frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$ | k) $16x^3 + 60x^2 + 74x + 30$ | l) $f'(x) = 16x^3 + \frac{7x^2\sqrt{x}}{2}$ |
| m) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ | n) $f'(x) = -\frac{11}{(3x+4)^2}$ | o) $f'(x) = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}$ |
| p) $f'(x) = -24 + 18x$ | q) $f'(x) = -\frac{12x^2}{(x^3+21)^5}$ | r) $f'(x) = \frac{1000x^9}{(10-x^{10})^{11}}$ |
| 2. a) $f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ | b) $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ | c) $f'(x) = -\frac{1}{x}$ |
| d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2-x}$ | e) $f'(x) = \frac{2\ln(10) \cdot 10^{\frac{2x}{x+1}}}{(x+1)^2}$ | f) $f'(x) = \frac{x^2e^x - 4e^x - 2xe^x}{(x^2-4)^2}$ |
| g) $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\ln(3)\cos(x)}$ | h) $f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}$ | i) $-\frac{\cos(\ln(\cos(x))) \cdot \sin(x)}{\cos(x)}$ |
| 3. a) $t(x) = 6x - 5$ | b) $t(x) = -4x$ | |
| 4. $t(x) = 12x - 42; n(x) = -\frac{1}{12}x - \frac{23}{4}$ | | |
| 5. $P_1(2; -3)$ und $P_2(-2; 21)$ | | |
| 6. $k = -20$ | | |
| 7. $t(x) = -3x + 1$ | | |
| 8. $t_1(x) = -6$ und $t_2(x) = 21$ | | |

9. $t(x) = 2x - 1$

10. $K(4; 8)$

11. a) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$
NS: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$
 $T(1; -\frac{2}{3}), H(-1; \frac{2}{3})$
 $W(0; 0)$
Ursprungssymmetrie
- b) $D_f = \mathbb{R}, W_f = [-1; \infty[$
NS: $x_1 = -\frac{4}{3}, x_2 = 0$
 $T(-1; -1)$
 $W(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{27}), T(0; 0)$
-
- c) $D_f = \mathbb{R}, W_f = [\frac{103}{64}; \infty[$
NS: keine
 $H(0; 2), T_{1,2}(\pm\frac{\sqrt{5}}{4}; \frac{103}{64})$
 $W(\pm\frac{\sqrt{15}}{12}; \frac{1027}{576})$
 y -Achsensymmetrie
- d) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$
NS: $x_1 = 0$
 $H_1(\sqrt{2}; \frac{56}{12}\sqrt{2}), H_2(-\sqrt{6}; -\frac{8}{5}\sqrt{6})$
 $T_1(-\sqrt{2}; -\frac{56}{12}\sqrt{2}), T_2(\sqrt{6}; \frac{8}{5}\sqrt{6})$
 $W_1(0; 0), W_2(2; \frac{68}{15}), W_3(-2; -\frac{68}{15})$
Ursprungssymmetrie
- e) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$
NS: $x_1 = -1; x_2 = 2$
 $H(-1; 0), T(1; -\frac{2}{3})$
 $W(0; -\frac{1}{3})$
- f) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$
NS: $x_1 = 1; x_2 = -2$
 $H(-2; 0), T(0; -4)$
 $W(-1; -2)$
- g) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$
NS: $x_1 = 0; x_2 = 1$
 $H(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}), T(1; 0)$
 $W(\frac{2}{3}; \frac{2}{27})$
- h) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 = 0$
 $T(0; 0)$
 $W_1(1; \frac{7}{8}), W_2(2; 2)$
12. a) $D_f = \mathbb{R}, W_f = [-1; 1]$
NS: $x_1 = 0$
 $H(1; 1), T(-1; -1)$
 $W_{1,2}(0; 0), W_{2,3}(\pm\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$
 $a(x) = 0$
Ursprungssymmetrie
- b) $D_f = \mathbb{R}, W_f =]0; 4[$
NS: keine
 $H(0; 4)$
 $W_{1,2}(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; 3)$
 $a(x) = 0$
 y -Achsensymmetrie
- c) $D_f = \mathbb{R}_0^+, W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 = 0$
- d) $D_f = \mathbb{R}_0^+, W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 = 0$
 $W(\frac{1}{4}; \frac{9}{16})$
- e) $D_f = \mathbb{R}, W_f = [-2.24; 2.24]$
NS: $x_k = 2.03 + k\pi$
 $H_k(0.46 + 2k\pi; 2.24),$
 $T_k(3.61 + 2k\pi; -2.24)$
 $W_k(2.03 + k\pi; 0)$
- f) $D_f = \mathbb{R}, W_f = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
NS: $x_k = k \cdot \frac{\pi}{2}$
 $H_k(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{1}{2}), T_k(-\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{1}{2})$
 $W_k(k \cdot \frac{\pi}{2}; 0)$
Ursprungssymmetrie
- g) $D_f = \mathbb{R}, W_f =]-\infty; \frac{1}{e}]$
NS: $x_1 = 0$
 $H(1; \frac{1}{e})$
 $W(2; \frac{2}{e^2})$
 $a(x) = 0$
- h) $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 = 1$
 $H(-1; \frac{4}{e}), T(1; 0)$
 $W_1(-\sqrt{2} - 1; 1.04),$
 $W_2(\sqrt{2} - 1; 0.52)$
 $a(x) = 0$

- i) $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = [-\frac{1}{e}; \infty]$
 NS: $x_1 = 1$
 $T(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e})$
13. $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$
14. $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2$
15. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
16. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$
17. $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$
18. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$
19. $f(x) = -\frac{1}{27}x^5 + \frac{5}{9}x^3$
20. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2$
21. $f(x) = -\frac{1}{27}x^5 + \frac{5}{9}x^3$
22. $0.04x^4 - 1.28x^2 + 10.24$
23. Länge $l = 20\text{cm}$, Breite $b = 10\text{cm} \Rightarrow$ Minimum
24. 5cm , 10cm , 15cm ; $V_{\max} = 750\text{cm}^3$
25. a) $F(x) = 2x^2 + c$
 b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$
 c) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
 d) $F(x) = -\frac{1}{12}x^9 + c$
 e) $F(x) = 1001x + c$
 f) $F(x) = c$
 g) $F(x) = \sqrt{x} + c$
 h) $F(x) = 4x\sqrt[4]{x^3}$
 i) $F(x) = -\cos(x) + \sin(x) + c$
 j) $F(x) = -3\cos(x) - 2\sin(x) + c$
 k) $F(x) = 2e^x + c$
 l) $F(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + c$
 m) $F(x) = \frac{3x \cdot \ln(x)}{2} - \frac{3}{2}x + c$
 n) $F(x) = \frac{3 \log_4(x) \cdot x}{2} - \frac{3x}{4 \ln(2)} + c$
26. a) $F(x) = x + c$
 b) $F(x) = \frac{3}{2}x^4 + c$
 c) $F(x) = x^3 - x + c$
 d) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 4x + c$
 e) $F(x) = -\frac{1}{x} + c$
 f) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + c$
 g) $F(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + c$
 h) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 5\ln|x| + c$
 i) $F(x) = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{10x\sqrt{x}}{3} + c$
 j) $F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$
 k) $F(x) = \sin(x) + c$
 l) $F(x) = \tan(x) + c$

- m) $F(x) = e^x - \cos(x) + c$
- n) $F(x) = \frac{5^x}{\ln(5)}$
- o) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$
- p) $F(x) = x\pi \cdot \ln(x) - x\pi + c$
- q) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin(x) + c$
- r) $F(x) = \ln|x| + c$
27. a) 16
- b) 12
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $3 - 2\ln(2)$
- e) 14
- f) $\sqrt{3}$
- g) 1
- h) 8
- i) $e^2 - 1$
- j) $e\pi - \pi$
- k) 13
- l) 2
28. a) $A = 72$
- b) $A = \frac{1}{2}$
- c) $A = \frac{4}{3}$
- d) $A = \frac{128}{15}$
- e) $A = \frac{784}{15}$
- f) $A = 4\sqrt{3} - \ln(7 + 4\sqrt{3})$
29. a) $A = \frac{64}{3}$
- b) $A = \frac{256}{3}$
- c) $A = 9$
- d) $A = \frac{5}{3}$
30. a) $\frac{1}{3}$
- b) $-\frac{1}{2}$
- c) 4
- d) $\frac{3}{32}$
- e) 2
- f) $\infty \text{ div}$
- g) $-\frac{1}{2}$
- h) $\frac{11}{18}$
- i) 1
- j) $\infty \text{ div}$
- k) $\frac{1}{2}e^3$
- l) 2
31. a) $V = 107.23$
- b) $V = 203.58$
- c) $V = 3.83$
- d) $V = 2.55$
- e) $V = 67.02$
- f) $V = 4.19$
32. a) $F(x) = \frac{1}{12}(2x + 3)^6 + c$
- b) $F(x) = \frac{1}{3}(3x - 1)^7 + c$
- c) $F(x) = -\frac{1}{4}(12 - x)^4 + c$
- d) $F(x) = -\frac{1}{2}(3 - \frac{1}{2}x)^4 + c$
- e) $F(x) = (3x - 9)^4 + c$
- f) $F(x) = -\frac{\sqrt{2}}{6}(3 - x\sqrt{2})^3 + c$
- g) $F(x) = -\frac{1}{4}(4x + 3)^{-1} + c$
- h) $F(x) = (1 - x)^{-2} + c$

- i) $F(x) = \frac{2}{3} \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^{-3} + c$
- k) $F(x) = \frac{3}{2\left(2 - \frac{1}{3}x\right)^4} + c$
33. a) $F(x) = \frac{1}{21}(3x - 5)^7$
- c) $F(x) = 2(x + 2)^{\frac{1}{2}}$
- e) $F(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 1)^4$
- g) $F(x) = -3(1 - x^2)^{\frac{2}{3}}$
- i) $F(x) = e^{x^2}$
- k) $F(x) = \ln|\ln(x)|$
34. a) $F(x) = e^x(x - 1)$
- c) $F(x) = e^x(x - 2)$
- e) $F(x) = e^{2x} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$
- j) $F(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2} + c$
- l) $F(x) = \sqrt{2x+1} + c$
- b) $F(x) = \frac{5}{3}\ln|3x - 4|$
- d) $F(x) = \frac{4}{5a}(ax + b)^{\frac{5}{7}}$
- f) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$
- h) $F(x) = \frac{3}{4}\ln(1 - x^4)$
- j) $F(x) = -\frac{a}{2b}e^{-bx^2}$
- l) $F(x) = ax$
- b) $F(x) = 2e^x(x - 1)$
- d) $F(x) = e^{2x} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)$
- f) $F(x) = e^{2x} \left(x + \frac{1}{2}\right)$

2.15 Differentialgleichungen

Unter einer Differentialgleichung (DGL) versteht man eine Gleichung für eine unbekannte Funktion, in der auch Ableitung dieser Funktion vorkommen. Der Grad einer Differentialgleichung entspricht der Ordnung der höchsten darin vorkommenden Ableitung.

Lösungen von Differentialgleichungen sind meist nicht eindeutig, aber in vielen Fällen erhält man bei Grad 1 eine eindeutige Lösung, wenn man zusätzlich den Wert von y an einer Stelle vorgibt, den sog. Anfangswert. Das Lösen eines Anfangswertproblems besteht aus dem Suchen einer Lösung, die sowohl die vorgegebene Differentialgleichung als auch die Anfangsbedingung erfüllt.

Anfangswertproblem (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 yy' - x &= 0 \\
 \text{bei} \\
 (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} &= y \\
 \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x &= y' \\
 \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - x &= 0 \\
 x - x &= 0 \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Richtungsfelder (Beispiel)

Skizze eines Richtungsfeldes für folgende Differentialgleichung: $y' = x^2 + y^2 - 1$. In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Punkte die jeweiligen Steigungen y' angegeben.

x	-2	-1	0	1	2	...	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	...	1	1	1	1	1	...
y'	3	0	-1	0	3	...	4	1	0	1	4	...

Tabelle 2.15.1: Momentane Änderungsrate für $y' = x^2 + y^2 - 1$

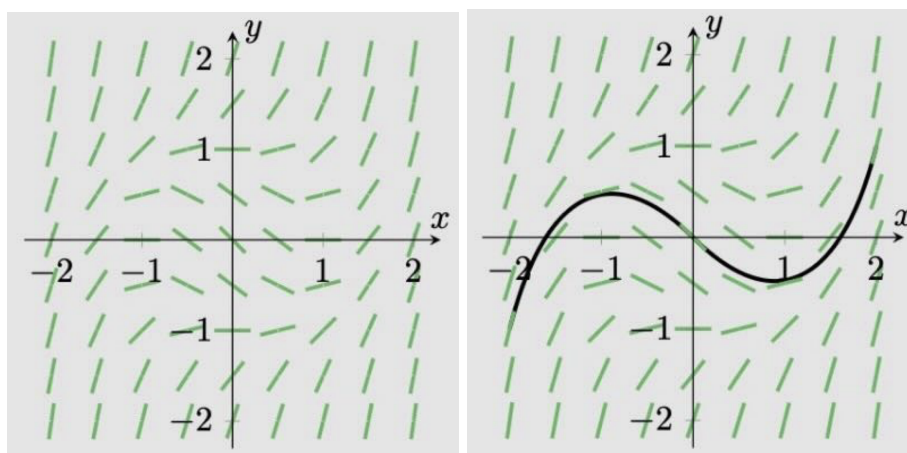


Abbildung 2.15.1: Richtungsfelder (Beispiel)

Isoklinen und Gleichgewichtslösungen

Die Bestimmung und Darstellung des Richtungsfeldes einer Differentialgleichung kann aufwendig sein. Manchmal ist es hilfreich, zuerst die sog. Isoklinen zu bestimmen. *Isoklinen* einer Differentialgleichung sind Kurven in der xy -Ebene, entlang derer das Richtungsfeld konstant ist. Alle Lösungen der Differentialgleichung haben an den Schnittpunkten mit einer Isokline die gleiche Steigung. *Gleichgewichtslösungen* sind Lösungen, bei welchen $y' = 0$ gilt. Mit anderen Worten: Die Gleichgewichtslösungen der Differentialgleichung sind konstante Funktionen.

Wachstums- und Zerfallsprozessen

Lösungsfunktionen wichtiger Differentialgleichungen bei Wachstums- und Zerfallsprozessen. Hinweis: Bei den folgenden Beispielen wird stets $k > 0$ angenommen.

1. Natürliches Wachstum

$P(t)$ ist die Grösse einer Population zur Zeit t mit der Anfangspopulation P_0 .

$P'(t) = k \cdot P(t)$ mit $P(0) = P_0$ hat die Lösung $P(t) = C \cdot e^{kt}$ mit $C = P_0$.

2. Von unten beschränkter Zerfall, z.B. Abkühlungsgesetz

$T(t)$ ist die Temperatur eines Körpers zur Zeit t mit der Anfangstemperatur T_0 und der Umgebungstemperatur U .

$T'(t) = -k \cdot (T(t) - U)$ mit $T(0) = T_0$ hat die Lösung $T(t) = U + C \cdot e^{-kt}$ mit $C = T_0 - U$.

3. Von oben beschränktes Wachstum, z.B. Grippeausbruch in einer isolierten Gesellschaft

$I(t)$ ist die Anzahl der Infizierten zur Zeit t mit der Zahl I_0 der Infizierten zu Beginn des Grippeausbruchs und der Zahl N der Individuen in der isolierten Gesellschaft.

$i'(t) = k \cdot (N - I(t))$ mit $I(0) = I_0$ hat die Lösung $I(t) = N - C \cdot e^{-kt}$ mit $C = N - I_0$.

4. Logistisches Wachstum

Wie beim natürlichen Wachstum, wobei S die Sättigungspopulation ist. $P'(t) = k \cdot P(t) \cdot (S - P(t))$ mit $P(0) = P_0$ hat die Lösung $P(t) = \frac{C}{1 + C \cdot e^{-kSt}}$ mit $C = \frac{S - P_0}{P_0}$.

2.16 Algebraische Hilfsmittel für die Analysis

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein Rechenverfahren, das bei einer glatten Funktion $f(x)$ als Hilfe zur näherungsweise Bestimmung von Nullstellen durch schrittweisen Änderungen eines Startwerts x_0 verwendet werden kann.

Ausgangslage:

$$f(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Endergebnis:

$$f(x_n) \approx 0$$

Weiteres Vorgehen:

1. Erster Startwert x_0 wird geraten und damit wird weiter gerechnet.
2. Weiterrechnen bis $f(x_n)$ sich fast nicht mehr ändert.

Horner-Schema

Das Horner-Schema ist ein Verfahren, das bei einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ als Hilfe zur Berechnung von Nullstellen und von Funktionswerten $f(x_0)$ genutzt werden kann.

Ausgangslage:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

	a_3	a_2	a_1	a_0
$x_1 = x$	↓	$a_3 \cdot x$ ↓	$(a_2 + a_3x) \cdot x$ ↓	$(a_1 + a_2x + a_3x^2) \cdot x$ ↓
	$\underbrace{a_3}_{b_2}$ ↗	$\underbrace{a_2 + a_3x}_{b_1}$ ↗	$\underbrace{a_1 + a_2x + a_3x^2}_{b_0}$ ↗	$\underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}_{f(x)=0}$

Tabelle 2.16.1: Vorgehen beim Horner-Schema

Endergebnis:

$$f(x) = (x - x_0)(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

Weiteres Vorgehen:

1. x raten bis $f(x) = 0$ (Anzahl Nullstellen $\hat{=}$ Grad der Gleichung)
Hinweis: Alle Teiler von a_0 (positiv und negativ) sind mögliche x 's.
2. Bei $x^n \mid n \geq 3$ weitere x 's erraten, berechnen und die **Linearfaktoren** notieren...
3. ... bis $x^n \mid n = 2$: Danach kann das Polynom mithilfe der Mitternachtsformel ausgerechnet werden!
4. Alle Lösungen entsprechen den Nullstellen der Funktion des jeweiligen Polynoms!

Polynomdivision (Analyse des asymptotischen Verhaltens)

Um das asymptotische Verhalten einer gebrochen-rationalen Funktion zu untersuchen, führt man eine Polynomdivision durch, deren Rest das Verhalten zeigt.

Ausgangslage:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \Rightarrow (ax^2 + bx + c) : (dx + e)$$

$$\begin{array}{r}
 (ax^2 + bx + c) \qquad \qquad \qquad : (dx + e) \\
 \hline
 - (ax^2 + e(ax^2 : dx)) \qquad \qquad \downarrow \\
 \hline
 bx - e(ax^2 : dx) \nearrow + c \\
 \hline
 - (bx - e(ax^2 : dx) + e((bx - e(ax^2 : dx)) : dx)) \swarrow \\
 \hline
 c - e((bx - e(ax^2 : dx)) : dx) \nearrow
 \end{array}$$

Tabelle 2.16.2: Vorgehen bei der Polynomdivision

$$= \underbrace{(ax^2 : dx)}_{b_1} + \underbrace{(bx - e(ax^2 : dx)) : dx}_{b_0} + \underbrace{\frac{c - e((bx - e(ax^2 : dx)) : dx)}{dx + e}}_{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0}$$

Endergebnis: Somit ist die Asymptote $a(x)$ (nach Grenzübergang von $f(x)$)...

$$a(x) = b_1 + b_0$$

Weiteres Vorgehen:

1. Bei $x^n \mid n \geq 3$ genau gleichen Vorgang folgen.
2. Bei $x^n \mid n \geq 2$ muss jeder Grad in absteigender Grösse repräsentiert werden ergo $0x^n$.
3. Gradunterschiede $\hat{=}$ Art der Asymptote (Gerade / Parabel / ...).

3 Geometrie

3.1 Ähnlichkeiten

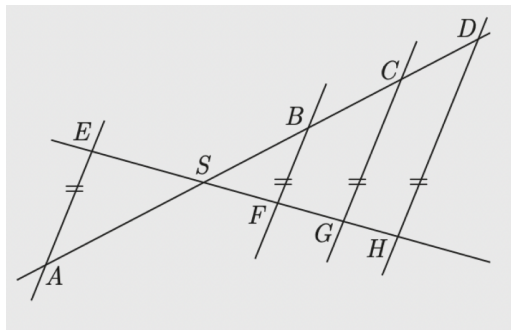


Abbildung 3.1.1: Erster und zweiter Strahlensatz

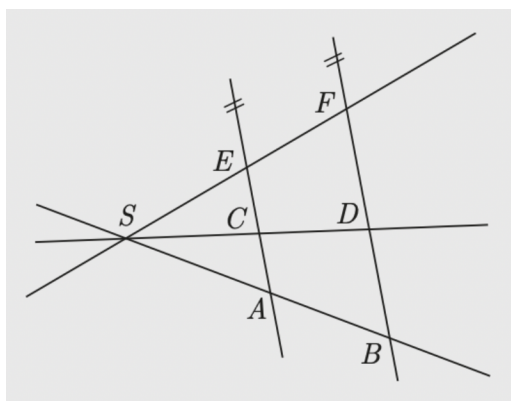


Abbildung 3.1.2: Dritter Strahlensatz

Erster Strahlensatz

Werden zwei sich in S schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die Abschnitte auf der anderen Geraden.

Zweiter Strahlensatz

Werden zwei sich in S schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenen Abschnitte auf den Geraden.

Dritter Strahlensatz

Werden drei sich in einem Punkt schneidenden Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Parallelen wie die Abschnitte auf der anderen Parallelen.

Ähnliche Figuren

- Definition 1
Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie gleiche Winkel und gleiche Seitenverhältnisse haben.
- Definition 2
Zwei Figuren sind ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die beiden Figuren aufeinander abbildet.

Für Vielecke sind die beiden Definitionen äquivalent.

Zentrische Streckung

Eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z und Streckfaktor $k \neq 0$ ist eine geometrische Abbildung, die jedem Punkt P einem Bildpunkt P' zuordnet, so dass...

- ... P' auf den Geraden \overline{ZP} liegt.
- ... $\overline{P'Z} = |k| \cdot \overline{PZ}$

Ist $k > 1$, liegt P zwischen Z und P' .
Ist $0 < k < 1$, liegt P' zwischen Z und P .
Ist $k < 0$, liegt Z zwischen P und P' .

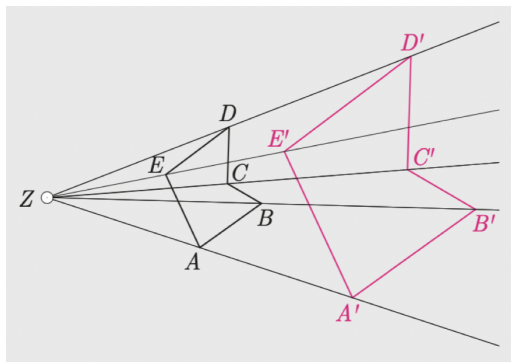


Abbildung 3.1.3: Zentrische Streckung (Beispiel)

- Die zentrische Streckung ist geraden-, kreis-, parallelen- und winkeltreu, jedoch nicht längentreu.
- Alle Bildstrecken sind $|k|$ -mal so lang wie das Urbildstrecken.
- Urbild und Bild sind ähnlich.
- Für $k = -1$ ist die zentrische Streckung eine Punktspiegelung an Z .
- Einziger Fixpunkt ist Z .
- Längen werden mit Faktor $|k|$ gestreckt, Flächen mit Faktor k^2 , Volumina mit Faktor $|k|^3$

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie...

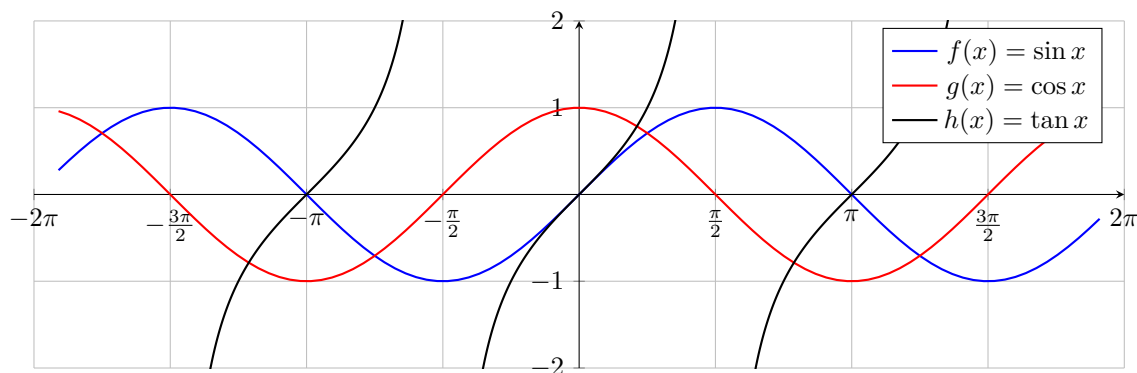
- ... in allen Verhältnissen entsprechender Seiten übereinstimmen ($S : S : S$).
- ... in zwei (und damit in drei) Winkeln übereinstimmen ($W : W$).
- ... im Verhältnis zweier Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel übereinstimmen ($S : W : S$).
- ... im Verhältnis zweier Seiten und dem der grösseren Seite gegenüber liegenden Winkel übereinstimmen ($S : s : W$).

WW-Satz

Zwei Dreiecke sind genau dann winkeligleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.

3.2 Trigonometrie

Winkelfunktionen



	sin	cos	tan
Perioden	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
Nullstellen	$\pi \pm \pi$	$\frac{\pi}{2} \pm \pi$	$\pi \pm \pi$
Maximum	$\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$	$2\pi \pm 2\pi$	
Minimum	$-\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$	$-\pi \pm 2\pi$	
Definitionslücken			$\frac{\pi}{2} \pm \pi$

Tabelle 3.2.1: Graphen von Winkelfunktionen

Die 3 trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \text{Sinus} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \text{Cosinus} &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \text{Tangens} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) &= 1 \\ \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} &= \tan(\phi) \end{aligned}$$

Berechnungen im allgemeinen Dreieck

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Cosinussatz:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

Trigonometrische Flächenformel:

$$A = \frac{ab}{2} \cdot \sin(\gamma) = \frac{ac}{2} \cdot \sin(\beta) = \frac{bc}{2} \cdot \sin(\alpha)$$

Beispiele

1. Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck: $a = 3\text{cm}$, $\beta = 50^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

$$\alpha : \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = \underline{40^\circ}$$

$$b : \tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 3 \tan(50^\circ) = \underline{3.58\text{cm}}$$

$$c : \cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{\cos(50^\circ)} = \underline{4.67\text{cm}}$$

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90^\circ$) kennt man $a = 7.2\text{ cm}$ und $b = 4.8\text{ cm}$. Berechne c , α und β .

$$c : a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7.2^2 + 4.8^2} = \underline{8.65\text{cm}}$$

$$\alpha : \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow \arctan\left(\frac{7.2}{4.8}\right) = \underline{56.31^\circ}$$

$$\beta : \tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{4.8}{7.2}\right) = \underline{33.69^\circ}$$

3. Von einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90^\circ$) kennt man $a = 8$, $\alpha = 34.17^\circ$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

$$\beta : \beta = 180^\circ - 90^\circ - 34.17^\circ = \underline{55.83^\circ}$$

$$c : \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{8}{\sin(34.17^\circ)} = \underline{14.24}$$

$$b : \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{8}{\tan(34.17^\circ)} = \underline{11.78}$$

4. Trigonometrie im allgemeinen Dreieck: $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$

$$\gamma : c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$2ab \cdot \cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}\right) = \underline{78.46^\circ}$$

$$\beta : \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) = \underline{57.12^\circ}$$

$$\alpha : \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = \underline{44.42^\circ}$$

5. $a = 4.5$, $b = 6.0$, $\alpha = 47^\circ$; berechne die fehlenden Teile!

$$\begin{aligned}\beta &: \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \\ \sin(\beta) &= \frac{\sin(\alpha) \cdot b}{a} \\ \beta_1 &= \arcsin\left(\frac{\sin(47^\circ) \cdot b}{4.5}\right) = \underline{\underline{77.2^\circ}} \\ \beta_2 &= 180^\circ - \beta_1 = \underline{\underline{102.8^\circ}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &: \gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 = \underline{\underline{55.8^\circ}} \\ 180^\circ - \alpha - \beta_2 &= \underline{\underline{30.2^\circ}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &: \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \\ c_1 &= \frac{a \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} = \underline{\underline{5.09}} \\ c_2 &= \frac{a \cdot \sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)} = \underline{\underline{3.09}}\end{aligned}$$

6. Von einem Dreieck kennt man $b = 5$, $c = 4$ und $\alpha = 60^\circ$. Berechne a .

$$\begin{aligned}a^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos(60^\circ) = 21 \\ a &= \underline{\underline{\sqrt{21}}}\end{aligned}$$

7. Von einem Dreieck kennt man $a = 7$, $b = 9$, $\gamma = 29^\circ$. Berechne die Seiten und Winkel.

$$c : c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) = \underline{\underline{4.45}}$$

$$\begin{aligned}\beta &: b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) \\ \cos(\beta) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \underline{\underline{101.30^\circ}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &: \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) = \underline{\underline{49.70^\circ}}\end{aligned}$$

8. Um die Entfernung zweier Punkt A, B von einem unzugänglichen Punkt P zu ermitteln („Vorwärtseinschneiden“), misst man $\overline{AB} = 265.7m$, sowie $\angle PAB = \alpha = 56.3^\circ$ und $\angle ABP = \beta = 72.7^\circ$. Bestimme die Länge von \overline{AP} .

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\sin(\beta)} &= \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \\ \overline{AP} &= \frac{265.7 \cdot \sin(72.7^\circ)}{\sin(51^\circ)} = \underline{\underline{326.425m}}\end{aligned}$$

9. Beim „Rückwärtseinschneiden“ soll die Entfernung zweier Punkte P und Q ermittelt werden, zwischen denen in Hindernis liegt. Gemessen werden die Standlinie \overline{AB} sowie von A bzw. P aus die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Berechne \overline{PQ} für $\overline{AB} = 1.8km$; $\angle PAB = \alpha = 68^\circ$; $\angle PAQ = \beta = 42^\circ$; $\angle ABQ = \gamma = 85^\circ$; $\angle PBQ = \delta = 36^\circ$.

$$\angle ABP = \gamma - \delta = 49^\circ$$

$$\angle BPA = 180^\circ - \alpha - 49^\circ = 63^\circ$$

$$\overline{BP} : \frac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(63^\circ)}$$

$$\overline{BP} = \frac{1.8 \cdot \sin(68^\circ)}{\sin(63^\circ)} = 1.873km$$

$$\angle QAB = \alpha - \beta = 26^\circ$$

$$\angle BQA = 180^\circ - \gamma - 26^\circ = 69^\circ$$

$$\overline{BQ} : \frac{\overline{BQ}}{\sin(26^\circ)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(69^\circ)}$$

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin(26^\circ)}{\sin(69^\circ)} = 0.845km$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{BP}^2 - 2 \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{BP} \cdot \cos(\delta)$$

$$\overline{PQ} = \underline{\underline{1.289km}}$$

Umformung

Gradmass ($^\circ$) - Bogenmass (rad):

$$\frac{\text{Gradmass} \cdot \pi}{180^\circ} = \text{rad}$$

Bogenmass (rad) - Gradmass ($^\circ$):

$$\pi \Rightarrow 180^\circ \hat{=} \text{Gradmass}$$

Definition der Winkelmasse: positiv \rightarrow Gegenuhrzeigersinn / negativ \rightarrow Uhrzeigersinn

Merke:

$^\circ$	30°	45°	57.30°	60°	90°	180°	270°	360°
RAD	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabelle 3.2.2: Häufige Umrechnungen zwischen Gradmass und Bogenmass

Trigonometrische Funktionen und der Einheitskreis

Ein Einheitskreis hat den Radius 1 und den Mittelpunkt im Ursprung. Gebraucht sind ein Winkel α (in Bogenmass) und einen Punkt $P(x; y)$ auf dem Kreis.

$$\sin(\alpha) = y$$

$$\cos(\alpha) = x$$

Da der Kreis rund ist, wiederholen sich die Werte periodisch.

Zusammenhang: Einheitskreis & Trigonometrische Funktionen

Der Einheitskreis ist das Urbild. Die Funktionsgraphen sind das Abbild über die Zeit (Winkel α).

Polarkoordinaten $r \hat{=}$ Polarabstand ϕ (rho) $\hat{=}$ Polarwinkel

$$\sin(\phi) = \frac{y}{r} \quad \cos(\phi) = \frac{x}{r} \quad \tan(\phi) = \frac{y}{x}$$

$$x = r \cdot \cos(\phi) \quad y = r \cdot \sin(\phi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \phi$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\arctan(\alpha \pm \beta) = \left| \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \right|$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \quad \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

Aber bspw. $\cos(2x)$ kann zu $\cos(z)$ substituiert werden, aber der Intervall wird i.d.F. $2\pi \Rightarrow \pi$

Goniometrische Gleichungen

$$\text{trig}(ax + b) = c$$

Trigonometrischer Koeffizient, konstantes Glied

Substitution (Vorgehen) und Rücksubstitution:

$$\text{trig}(z) = c \Rightarrow z = ax + b \Rightarrow x = \frac{z - b}{a}$$

Funktion	Grundlösung für z	Periode
$\sin(z) = c$	$z_1 = \arcsin(c), z_2 = \pi - \arcsin(c)$	2π
$\cos(z) = c$	$z_{1, 2} = \pm \arccos(c)$	2π
$\tan(z) = c$	$z = \arctan(c)$	π

Tabelle 3.2.3: Übersicht: Trigonometrische Gleichungen

Berechnung weiterer Lösungen:

Sinus

$$\phi_{\text{TR}} = \phi_1 > 0, \text{ d.h.: } \phi_1; \phi_2 = \pi - \phi_1$$

$$\phi_{\text{TR}} < 0, \text{ d.h.: } \phi_1 = 2\pi + \phi_{\text{TR}}; \phi_2 = \pi - \phi_{\text{TR}}$$

Cosinus

$$\phi_1 = \phi_{\text{TR}}$$

$$\phi_2 = 2\pi - \phi_1$$

Tangens

$$\phi_{\text{TR}} = \phi_1 > 0, \text{ d.h.: } \phi_1; \phi_2 = \pi + \phi_1$$

$$\phi_{\text{TR}} < 0, \text{ d.h.: } \phi_1 = \pi + \phi_{\text{TR}}; \phi_2 = \pi + \phi_1$$

Beispiel

1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2} \\ \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &\Rightarrow z_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad z_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \underline{\underline{k\pi}} \\ 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} + k\pi}}\end{aligned}$$

2. $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sqrt{3}\cos(x) \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \sqrt{3} \\ \tan(x) &= \sqrt{3} \\ x_1 &= \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}} \\ x_2 &= \pi + \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}\end{aligned}$$

3. $2\sin^2(x) - \sin(x) = 1$ $s = \sin(x)$

$$\begin{aligned}2s^2 - s - 1 &= 0 \\ (2s + 1)(s - 1) &= 0 \\ s_1 &= -0.5 \\ s_2 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_1 : -0.5 &= \sin(x_h) \\ x_h &= \arcsin(-0.5) = -\frac{\pi}{6} \\ x_1 &= x_h + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \\ x_2 &= \pi - x_h = \frac{7\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_2 : 1 &= \sin(x_3) \\ x_3 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

$$4. \quad 3 \sin(x) - 2 \cos(x) + 3 = 0$$

$$3 \sin(x) - 2\sqrt{1 - \sin^2(x)} + 3 = 0$$

$$(3 \sin(x) + 3)^2 = (2\sqrt{1 - \sin^2(x)})^2$$

$$9 \sin(x) + 18 \sin(x) + 9 = 4(1 - \sin^2(x))$$

$$= 4 - 4 \sin^2(x)$$

$$13 \sin^2(x) + 18 \sin(x) + 5 = 0 \quad u = \sin(x)$$

$$13u^2 + 18u + 5 = 0$$

$$(13u + 5)(u + 1) = 0$$

$$u_1 = -\frac{5}{13}$$

$$u_2 = -1$$

$$u_1 : -\frac{5}{13} = \sin(x_h)$$

$$x_h = -0.395$$

$$x_1 = x_h + 2\pi = 5.888$$

$$x_2 = \pi - x_h = 3.536 \quad \checkmark$$

$$u_2 : -1 = \sin(x_3)$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{3\pi}{2}; 5.888 \right\}$$

3.3 Aufgaben zur Trigonometrie

Aufgaben

- Berechne im rechtwinkligen Dreieck mit dem rechten Winkel bei C die fehlenden Seiten und Winkel.
 - $a = 20, b = 21$
 - $a = 88, c = 137$
 - $a = 12, \alpha = 40^\circ$
 - $c = 32.7, \beta = 47.3^\circ$
- Im rechtwinkligen Dreieck mit rechtem Winkel bei C sind gegeben:
 - $a = 24, c = 74$, berechne die Länge der Winkelhalbierenden von w_α und w_β .
 - $h_c = 25, w_\gamma = 32$, berechne a und b .
 - $a = 15, w_\beta = 17$, berechne die Seitenhalbierende s_a .
 - $b = 83, w_\alpha = 20$, gesucht ist w_β .
 - $\alpha = 36^\circ, w_\alpha = 20$, gesucht ist w_β .
 - $c = 39, \beta = 52^\circ$, berechne h_c .
- Ein rechtwinkliges Dreieck ist durch die Kathete $b = 65$ und die Hypotenuse $c = 97$ gegeben. Wie lang ist die Halbierende des kleinsten Innenwinkels?
- Wie gross sind die Innenwinkel eines Rhombus mit den Diagonalen $e = 57.2$ und $f = 81.7$?
- Wie lange sind die Diagonalen eines Rhombus, von dem ein Innenwinkel von 61° und der Flächeninhalt $A = 28$ bekannt sind?
- Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist durch die parallelen Seiten $a = 45$ und $c = 33$ sowie die Diagonale $e = 89$. Wie gross sind die Basiswinkel?
- Berechne (und runde zweckmässig)
 - die Höhe eines Turms, wenn man seine Spitze unter einem (Höhen-)Winkel von 23° erblickt und der (Horizontal-)Abstand zum Turm $478m$ beträgt. Das Auge des Betrachters liegt dabei $1.6m$ höher als der Fusspunkt des Turms.
 - die Horizontalabstand zum Dorfzentrum, wenn man von einem hohen Aussichtspunkt (1133 m.ü.M.) mit einem Winkel von 72° gegenüber der Vertikalen zum Dorfzentrum (694 m.ü.M.) hinunterschaut.
 - die Luftdistanz zu einer Bergspitze, wenn sich ein Wanderer auf $1291m$ Höhe befindet, der Höhenwinkel des Sehstrahl 4.5° beträgt und der Berg in der Landkarte mit 2011 m.ü.M. angegeben ist. (Die Grösse des Wanderers kann hier vernachlässigt werden).
- Berechne im Dreieck ABC die fehlenden Winkel und Seiten aus:
 - $a = 15, \alpha = 35^\circ, \beta = 50^\circ$
 - $b = 9.3, c = 7.8, \beta = 51.3^\circ$
 - $c = 12, \beta = 9.7^\circ, \gamma = 93.8^\circ$
 - $a = 49, b = 57, \alpha = 84^\circ$
- Berechne im Dreieck die fehlenden Seiten und Winkel aus:
 - $a = 8, b = 5, \gamma = 75^\circ$
 - $a = 9.81, c = 7.25, \beta = 5.31^\circ$
 - $b = 63.2, c = 31.1, \alpha = 109.3^\circ$
 - $a = 5, b = 6, c = 7$
 - $a = 23, b = 38, c = 29$
 - $a = 8.12, b = 15.66, c = 5.89$
- Berechne im Dreieck die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt aus:
 - $\alpha = 42^\circ, b = 3, c = 7$
 - $\beta = 123^\circ, c = 4, a = 5$
 - $a = 13, b = 14, c = 15$
 - $a = 12.3, b = 32, c = 13.2$
- In einen Berg werden vom gleichen Punkt aus zwei geradlinige Stollen getrieben, die miteinander einen Winkel von 30° einschliessen. Der eine Stollen ist 5 km, der andere 7 km lang. wie weit sind die Endpunkte der Stollen voneinander entfernt und welche Winkel schliesst die Verbindungslinie mit den Stollen ein?

12. Ein Quader hat die Länge $\overline{AB} = 8\text{cm}$, die Breite $\overline{BC} = 5\text{cm}$ und die Höhe $\overline{BD} = 3\text{cm}$. S sei der Schnittpunkt der Raumdiagonalen des Quaders. Berechne den Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$.
13. Unter welchem Winkel sind bei einem Tetraeder die Seitenkanten (die Seitenflächen) gegen die Grundfläche geneigt?
14. Um die Entfernung zweier Punkte P und Q zu bestimmen, zwischen denen ein Hindernis liegt, wählt man einen geeigneten Hilfspunkt A und misst AP , AQ und $\angle PAQ$. Berechne \overline{PQ} für $\overline{AP} = 168\text{m}$; $\overline{AQ} = 214\text{m}$; $\alpha = 81.5^\circ$.
15. Zwei waagrechte Stollen in einem Bergwerk gehen von einem Punkt A unter dem Winkel $\alpha = 75^\circ$ aus und haben die Längen $\overline{AB} = 325\text{m}$ und $\overline{AC} = 275\text{m}$. Wie lang würde ein Verbindungsstollen von B nach C ? Unter welchen Winkeln gegen BA und CA muss man ihn von B und C aus vortreiben?
16. Um die Entfernung \overline{PQ} zweier unzugänglicher Punkte P und Q zu bestimmen, hat man eine Standlinie $\overline{AB} = 364.7\text{m}$ abgesteckt und $\angle PAB = \alpha = 68.2^\circ$, $\angle QAB = \beta = 34.9^\circ$, $\angle PBA = \gamma = 29.9^\circ$, $\angle QBA = \delta = 80.6^\circ$ gemessen. (Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten). Bestimme die Länge von \overline{PQ} .
17. Um die Höhe eines Berggipfels G zu bestimmen, misst man in den Endpunkten einer horizontalen Standlinie AB mit $\overline{AB} = 26.7\text{m}$ die Horizontalwinkel $\angle CAB = \alpha = 83.1^\circ$ und $\angle ABC = \beta = 64.5^\circ$, ferner den Höhenwinkel $\angle GAC = \gamma = 26^\circ$ und (zur Kontrolle) $\angle GBC = \delta = 24^\circ$. Wie hoch liegt G über A , wenn C der Fusspunkt auf der Horizontalhöhe AB von G ist.
18. Zwei gegenüberliegende Punkte A und B an den Ufer eines Flusses erblickt man von einem Aussichtspunkt C aus unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 18.5^\circ$ und $\beta = 25.8^\circ$. Die Strecke AB erscheint unter dem Horizontalwinkel $\gamma = 31.3^\circ$. Wie breit ist der Fluss, wenn C um $h = 186.5\text{m}$ über A und B liegt?
19. Gib die Winkel im Bogenmass als Vielfaches oder Teile von π an!
- | | |
|----------------|----------------|
| a) 15° | b) 120° |
| c) 315° | d) 330° |
| e) 135° | f) 150° |
| g) 300° | h) 270° |
20. Gib die Winkel im Gradmass an!
- | | |
|-----------------------|---------------------|
| a) $\frac{3\pi}{4}$ | b) $\frac{4\pi}{3}$ |
| c) $\frac{\pi}{2}$ | d) $\frac{\pi}{12}$ |
| e) $\frac{7\pi}{12}$ | f) $\frac{7\pi}{6}$ |
| g) $\frac{35\pi}{36}$ | h) 1 |
21. Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichungen im Bogenmass:
- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | b) $2 \cos(x) = \frac{1}{2}$ |
| c) $\tan(2x) = 1$ | d) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
22. Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichungen im Gradmass:
- | | | |
|----------------------------------|---|--------------------------------------|
| a) $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$ | b) $\cos(\alpha) = \sqrt{3} \sin(\alpha)$ | c) $\sin(\alpha) + \tan(\alpha) = 0$ |
|----------------------------------|---|--------------------------------------|
23. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0; 2\pi]$
- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) $5 \sin(x) = 3$ | b) $4 \cos(x) = -1$ |
| c) $3 \sin(x) - 2 = 0$ | d) $0.5 \cos(x) = -0.2$ |

- e) $\sqrt{3} \sin(x) = -1$ f) $3 \sin(x) - \cos(x) = 1.2$
g) $4 \cos(x) = 1 - 2 \cos(x)$ h) $3 \tan(x) = 4 - \tan(x)$
i) $5 \tan(x) + 3 = \tan(x)$ j) $\sin^2(x) = 0.25$
k) $5 \cos^2(x) = 1$ l) $\sin(x) = \frac{1}{9 \sin(x)}$
m) $\tan(x) = \frac{3}{\tan(x)}$
24. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0^\circ; 360^\circ]$
a) $9 \sin^2(\alpha) + 3 \sin(\alpha) = 2$ b) $3 + \cos(\beta) = \cos^2(\beta)$
c) $2 \cos(\gamma) - 3 \sin(\gamma) \cos(\gamma) = 0$ d) $\sin(\delta) + \tan(\delta) = 0$
25. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0; 2\pi[$
a) $3 \sin^2(x) + 7 \cos^2(x) = 9$ b) $5 \tan(x) = -2$
c) $4 \cos^2(x) = 1$ d) $6 \sin^2(x) + 1 = 5 \sin(x)$
26. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0^\circ; 360^\circ]$
a) $\sin(\alpha - 68^\circ) = 0.5$ b) $\cos(190^\circ - \beta) = 1$
c) $\tan(45^\circ - 2\gamma) = 0$ d) $\sin(2\delta + 30^\circ) = 0.3$
e) $2 \cos^2(22^\circ + 2\epsilon) - \cos(22^\circ + 2\epsilon) = 0$
27. Löse die Gleichungen in der Grundmenge $[0; 2\pi[$
a) $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ b) $\sin^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$
c) $\cos(\pi - 2x) = 0$ d) $\sin(1 - 2x) = -0.6$
e) $\cos(4x) = -0.6$ f) $\tan^2(2x) + \tan(2x) = 3$

Lösungen

1. a) $c = 29$, $\alpha = 43.6^\circ$, $\beta = 46.4^\circ$ b) $b = 105$, $\alpha = 39.97^\circ$, $\beta = 50.03^\circ$
c) $b = 14.3$, $c = 18.67$, $\beta = 50^\circ$ d) $a = 22.18$, $b = 24.03$, $\alpha = 42.7^\circ$
2. a) $w_\alpha = 70.97$, $w_\beta = 29.49$ b) 225.15 bzw. 25.16
c) 23.58 d) 219.69
e) 15.51 f) 18.92
3. a) $w_\beta = 77.14$ b) 110.01° bzw. 69.99°
c) 9.75 bzw. 5.74 d) 85.71°
4. a) 204.5m b) 1352m c) 9177
5. 145.5° , 7.5°
6. 141.35°
7. a) 17.4° b) 41'774km c) 42.5%
8. a) $b = 20.03$, $c = 26.05$, $\gamma = 95^\circ$ b) $a = 11.91$, $\alpha = 87.81^\circ$, $\gamma = 40.89^\circ$
c) $a = 11.68$, $b = 2.03$, $\alpha = 76.5^\circ$ d) Kein Dreieck!
9. a) $c = 8.26$, $\alpha = 69.24^\circ$, $\beta = 35.76^\circ$ b) $b = 7.74$, $\alpha = 81.70^\circ$, $\gamma = 47.00^\circ$
c) $a = 79.12$, $\beta = 48.93^\circ$, $\gamma = 21.77^\circ$ d) $\gamma = 78.46^\circ$, $\alpha = 44.41^\circ$, $\beta = 57.12^\circ$
e) $\beta = 93.18^\circ$, $\alpha = 37.18^\circ$, $\gamma = 49.64^\circ$ f) Kein Dreieck!
10. a) $a = 5.2$, $\beta = 22.8^\circ$, $\gamma = 115.2^\circ$, $A = 7.03$
b) $b = 7.9$, $\alpha = 32.0^\circ$, $\gamma = 25.0^\circ$, $A = 8.39$
c) $\alpha = 53.1^\circ$, $\beta = 59.5^\circ$, $\gamma = 67.4^\circ$, $A = 84$
d) Kein Dreieck!
11. ca. 3658 m; ca. 43.12° und ca. 106.88°

12. $\angle ASB = 107.8^\circ$, $\angle BSC = 60.7^\circ$
13. Seitenkante, Grundfläche: 54.7° ; Seitenfläche, Grundfläche: 70.5°
14. P und Q liegen 251.8 m auseinander
15. Stollen: 367.4 m lang. $\angle ABC = 46.3^\circ$, $\angle BCA = 58.7^\circ$
16. 265.1 m
17. G liegt 269 m über A
18. 303.4 m
19. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{7\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{6}$
e) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{5\pi}{6}$
g) $\frac{5\pi}{3}$ h) $\frac{3\pi}{2}$
20. a) 135° b) 240°
c) 90° d) 15°
e) 105° f) 210°
g) 175° h) 57.296°
21. a) $\mathbb{L} = \{k \mid k = \frac{\pi}{3} + z \cdot 2\pi \vee k = \frac{2\pi}{3} + z \cdot 2\pi; z \in \mathbb{Z}\}$
b) $\mathbb{L} = \{k \mid k = 1.318 + z \cdot 2\pi \vee k = 4.965 + z \cdot 2\pi; z \in \mathbb{Z}\}$
c) $\mathbb{L} = \{k \mid k = \frac{\pi}{8} + z \cdot \pi \vee k = \frac{5\pi}{8} + z \cdot \pi; z \in \mathbb{Z}\}$
d) $\mathbb{L} = \{k \mid k = \frac{\pi}{12} + z \cdot 2\pi \vee k = \frac{\pi}{12} + z \cdot 2\pi; z \in \mathbb{Z}\}$
22. a) $\mathbb{L} = \{k \mid k = 45^\circ + z \cdot 180^\circ; z \in \mathbb{Z}\}$
b) $\mathbb{L} = \{k \mid k = 30^\circ + z \cdot 180^\circ; z \in \mathbb{Z}\}$
c) $\mathbb{L} = \{k \mid k = z \cdot 180^\circ; z \in \mathbb{Z}\}$
23. a) $\mathbb{L} = \{0.64; 2.50\}$ b) $\mathbb{L} = \{1.82; 4.46\}$
c) $\mathbb{L} = \{1.82; 4.46\}$ d) $\mathbb{L} = \{1.98; 4.30\}$
e) $\mathbb{L} = \{3.76; 5.67\}$ f) $\mathbb{L} = \{0.64; 2.50\}$
g) $\mathbb{L} = \{1.40; 4.88\}$ h) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\}$
i) $\mathbb{L} = \{2.50; 5.64\}$ j) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\}$
k) $\mathbb{L} = \{1.11; 2.03; 4.25; 5.18\}$ l) $\mathbb{L} = \{0.34; 2.80; 3.48; 5.94\}$
m) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$
24. a) $\mathbb{L} = \{19.48^\circ; 160.43^\circ; 221.73^\circ; 317.99^\circ\}$ b) $\mathbb{L} = \{\}$
c) $\mathbb{L} = \{41.83^\circ; 90^\circ; 138.08^\circ; 270^\circ\}$ d) $\mathbb{L} = \{0^\circ; 180^\circ\}$
25. a) $\mathbb{L} = \{\}$ b) $\mathbb{L} = \{2.76; 5.90\}$
c) $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$ d) $\mathbb{L} = \{0.3398; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; 2.8018\}$
26. a) $\mathbb{L} = \{98^\circ; 218^\circ\}$
b) $\mathbb{L} = \{190^\circ\}$
c) $\mathbb{L} = \{22.5^\circ; 112.5^\circ; 202.5^\circ; 292.5^\circ\}$
d) $\mathbb{L} = \{44.18^\circ; 115.82^\circ; 164.18^\circ; 235.82^\circ; 284.18^\circ; 355.82^\circ\}$
e) $\mathbb{L} = \{19^\circ; 34^\circ; 124^\circ; 139^\circ; 199^\circ; 214^\circ; 304^\circ; 319^\circ\}$

27. a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \right\}$
b) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$
c) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \right\}$
d) $\mathbb{L} = \{0.8218; 1.7490; 3.9633; 4.8906 \}$
e) $\mathbb{L} = \{0.3165; 1.2543; 1.8873; 2.8251; 3.4581; 4.3959; 5.0289; 5.9667 \}$
f) $\mathbb{L} = \{0.4581; 0.9902; 2.0289; 2.5610; 3.5997; 4.3131; 5.1705; 5.7026 \}$

3.4 Vektorrechnung

Definition eines Vektors

Ein Vektor ist die Menge aller Pfeile gleicher Länge (Betrag), gleicher Richtung und gleicher Orientierung.

Vektorenberechnung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad P(x; y; z)$$

Vektor als Komponente und Betrag

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponent} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \hat{=} \text{Betrag}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponent} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \hat{=} \text{Betrag}$$

Betrag $\hat{=}$ Länge eines Vektors

Vektoraddition / -subtraktion und skalare Multiplikation

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_a \\ t \cdot y_a \end{pmatrix}$$

Linearkombinationen

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

Lineare Abhängigkeit:

- Linear unabhängig: Keiner der Vektoren lässt sich als Linearkombination der anderen schreiben.
- Linear abhängig: Die Vektoren lassen sich als Linearkombination der anderen schreiben (bei 2 Vektoren: kollinear / bei 3 Vektoren: komplanar).

Ortsvektor

Pfeil (Repräsentant), bei dem der Ausgangspunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist.

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt M eines Ortsvektor (für $x = a$ und $y = a$):

$$\text{Aus } a_M = \frac{a_P + a_Q}{2} \text{ folgt } a_M = \frac{a}{2}$$

Ortsvektor des Schwerpunkts eines Dreiecks ABC :

$$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C})$$

Skalarprodukt

Formel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Geometrische Interpretation:

$$\text{Winkelberechnung} \hat{=} \phi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$$\text{Spitzer Winkel} \hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{Stumpfer Winkel} \hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{Rechter Winkel (orthogonal)} \hat{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Kommutativität

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Distributivität

$$(s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Skalar ausklammerbar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$$

Winkelberechnung

Vektorprodukt

Formel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \overline{a_1} \quad \overline{b_1} \\ a_2 \quad \diagdown \quad b_2 \\ \quad \diagup \quad a_3 \quad b_3 \\ a_1 \quad \diagdown \quad b_1 \\ \quad \diagup \quad a_2 \quad b_2 \\ \overline{a_3} \quad \overline{b_3} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{array}$$

Geometrische Interpretation:

$$\text{Senkrecht} \hat{=} \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\text{Kollinear} \hat{=} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{Fläche des Rechtecks} \hat{=} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

Nullvektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

nicht kommutativ, aber antisymmetrisch

$$(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Skalar ausklammerbar

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Distributivgesetz

Spatprodukt

Formel:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Geometrische Interpretation:

$$\text{Komplanar} \hat{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{Volumen des Spats} \hat{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Flächenberechnung:

$$A = M |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$$

Volumenberechnung:

$$V = M (\vec{a} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|)$$

Multiplikationsfaktor M :

Fläche:

- Parallelogramm $\hat{=} 1$
- Dreieck $\hat{=} \frac{1}{2}$

Volumen:

- Spat $\hat{=} 1$
- Dreiseitiges Prisma $\hat{=} \frac{1}{2}$
- Tetraeder $\hat{=} \frac{1}{6}$

Kollinearität und Komplanarität

Die **Kollinearität** von Vektoren können durch das Multiplizieren der Komponente überprüft werden. Wenn die Komponente eines Vektor durch eine Multiplikation den Komponenten des anderen Vektors entspricht, sind die Vektoren kollinear (oder Vektorprodukt $\hat{=} 0$). Mathematisch gilt für kollineare Vektoren:

$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Die **Komplanarität** von Vektoren können durch die Darstellung als Linearkombinationen überprüft werden. Wenn die Vektoren gegenseitig durch Linearkombinationen dargestellt werden können, sind die Vektoren komplanar (oder Spatprodukt $\hat{=} 0$). Mathematisch gilt für komplanare Vektoren:

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

3.5 Analytische Geometrie

Geraden

Parameterdarstellung und Koordinatenform:

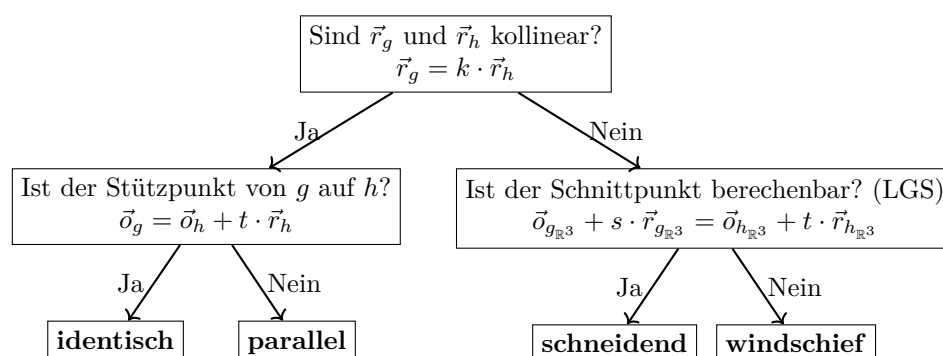
$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{o} + s \cdot \vec{r} \quad \text{und} \quad ax + by + c = 0$$

Umrechnung:

$$\begin{array}{ll} \vec{x} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} & | \text{Parameterdarstellung} \\ \vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -r_y \\ m_x \end{pmatrix} & | \vec{n} \text{ ist senkrecht zum Richtungsvektor} \\ -r_y \cdot x + r_x \cdot y + c = 0 & | -r_y = a \text{ und } r_x = b \\ -(-r_y \cdot A_x + r_x \cdot A_y) = c & | c \text{ berechnen} \\ ax + by + c = 0 & | \text{Koordinatenform} \end{array}$$

Lagebeziehungen:

$$g : \vec{x} = \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g \quad h : \vec{x} = \vec{o}_h + t \cdot \vec{r}_h$$



Ebenen

Parameterdarstellung und Koordinatenform:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \quad \text{und} \quad ax + by + cz + d = 0$$

Besonderheiten:

$$\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{yz} \\ b = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{xz} \\ c = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0 \hat{=} E \parallel E_{xy} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = b = 0 \Rightarrow cz + d = 0 \hat{=} E \parallel E_z \\ b = c = 0 \Rightarrow ax + d = 0 \hat{=} E \parallel E_x \\ c = a = 0 \Rightarrow by + d = 0 \hat{=} E \parallel E_y \end{array}$$

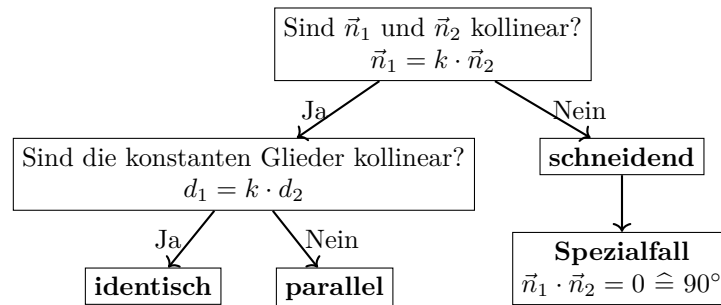
$$0 = ax + by + cz + d \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

$$\begin{array}{l|l}
 \vec{x} = \vec{o} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 & | \text{Parameterdarstellung} \\
 \vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 & | \vec{n} \text{ mithilfe des Vektorprodukts bilden} \\
 [\vec{x} - \vec{o}] \cdot \vec{n} = 0 & | \text{in die Normalenform einsetzen} \\
 \begin{pmatrix} x - o_x \\ y - o_y \\ z - o_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & | \text{Subtraktion} \\
 a(x - o_x) + b(y - o_y) + c(z - o_z) = 0 & | \text{Skalarprodukt} \\
 ax + by + cz + \underbrace{(-ao_x - bo_y - co_z)}_d = 0 & | \text{Faktorisierung} \\
 ax + by + cz + d = 0 & | \text{Koordinatenform}
 \end{array}$$

Lagebeziehungen:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



Kugel

Koordinatenform mit $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ (Ortsvektor des Kreismittelpunkts M):

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$$

Schnittprobleme

Gerade-Gerade:

Ausgangslage: Zwei Geraden in Parameterdarstellung.

Berechnung:

$$\begin{array}{l}
 \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g = \vec{o}_h + t \cdot \vec{r}_h \\
 o_{g,x} + r_{g,x}s = o_{h,x} + r_{h,x}t \\
 o_{g,y} + r_{g,y}s = o_{h,y} + r_{h,y}t \\
 o_{g,z} + r_{g,z}s = o_{h,z} + r_{h,z}t
 \end{array}$$

Diskussion:

$$\begin{array}{l|l}
 0 = 0 & | \text{identisch} \\
 s = t = \zeta & | \text{parallel / windschief} \\
 s = s_0 \wedge t = t_0 & | \text{schneidend}
 \end{array}$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|} \right)$$

Gerade-Ebene:

Ausgangslage: Gerade und Ebene in Parameterdarstellung.

Berechnung:

$$\vec{o}_G + s \cdot \vec{r}_G = \vec{o}_E + t \cdot \vec{r}_{1,E} + u \cdot \vec{r}_{2,E}$$

$$o_{G,x} + r_{G,x}s = o_{E,x} + r_{1,E,x}t + r_{2,E,x}u$$

$$o_{G,y} + r_{G,y}s = o_{E,y} + r_{1,E,y}t + r_{2,E,y}u$$

$$o_{G,z} + r_{G,z}s = o_{E,z} + r_{1,E,z}t + r_{2,E,z}u$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & | \text{ identisch} \\ s = t = u = \zeta & | \text{ parallel / windschief} \\ s = s_0 \wedge t = t_0 \wedge u = u_0 & | \text{ schneidend} \end{array}$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{|\vec{r}_G \cdot (\vec{r}_{1,E} \times \vec{r}_{2,E})|}{|\vec{r}_G| \cdot |\vec{r}_{1,E} \times \vec{r}_{2,E}|} \right)$$

Ausgangslage: Gerade in Parameterdarstellung und Ebene in Koordinatenform.

Berechnung:

$$g : \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}}_{\vec{r}} \quad E : \underbrace{ax + by + cz + d}_{\vec{n}}$$

$$0 = a(o_x + r_x s) + b(o_y + r_y s) + c(o_z + r_z s) + d$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & | \text{ identisch} \\ s = \zeta & | \text{ parallel} \\ s = s_0 & | \text{ schneidend} \end{array}$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} \right)$$

Spezialfall: Die Gerade schneidet eine Koordinatenebene.

1. Spurpunkt: Schnittpunkt mit der
- xy
- Ebene [
- $S_1(x; y; 0)$
-]

$$z = 0 \Rightarrow t : o_z + r_z t = 0$$

2. Spurpunkt: Schnittpunkt mit der
- yz
- Ebene [
- $S_2(0; y; z)$
-]

$$x = 0 \Rightarrow t : o_x + r_x t = 0$$

3. Spurpunkt: Schnittpunkt mit der
- xz
- Ebene [
- $S_3(x; 0; z)$
-]

$$y = 0 \Rightarrow t : o_y + r_y t = 0$$

 $s \vee t \vee u$ einsetzen, um Punkt S zu berechnen.

Ebene-Ebene:

Ausgangslage: Zwei Ebenen in Koordinatenform.

Berechnung:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 = k \cdot d_2 & | \text{ identisch} \\ \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 \neq k \cdot d_2 & | \text{ parallel} \\ \vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2 \wedge d_1 \neq k \cdot d_2 & | \text{ schneidend} \end{array}$$

Schnittgerade:

$$\vec{x} = \vec{o}_S + t \cdot \vec{r}_S$$

$$\vec{o}_S \hat{=} x = 0; y \wedge z \hat{=} \text{ im LSG lösen}$$

$$\vec{r}_S \hat{=} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

Spezialfall: Die Ebene schneidet eine Koordinatenebene.

1. Spurgerade: Schnittgerade mit der
- xy
- Ebene (
- $z = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0$
-):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Spurgerade: Schnittgerade mit der
- yz
- Ebene (
- $x = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$
-):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$$

3. Spurgerade: Schnittgerade mit der
- xz
- Ebene (
- $y = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0$
-):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Ebene-Ebene-Ebene:

Ausgangslage: Drei Ebenen in Koordinatenform.

Berechnung:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$E_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

Diskussion:

Alle Gleichungen sind kollinear	identisch
LGS hat genau eine Lösung $(x; y; z)$	schneidend (Schnittpunkt S)
LGS hat unendlich viele Lösungen $(0 = 0)$	schneidend (Schnittgerade g)
LGS ist nicht lösbar	nicht schneidend (Prisma-Lage)

Kugel-Gerade:

Ausgangslage: Gerade in Parameterdarstellung und Kugel in Koordinatenform.

Berechnung:

$$g : \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad K : (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$$

$$r^2 = ((o_x + r_x s) - m_x)^2 + ((o_y + r_y s) - m_y)^2 + ((o_z + r_z s) - m_z)^2$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} s_{1,2} & | \text{Sekante (zwei Schnittpunkte)} \\ s_1 & | \text{Tangente (ein Schnittpunkt)} \\ s = \{\} & | \text{Passante (kein Schnittpunkt)} \end{array}$$

 s einsetzen, um Punkt S zu berechnen.

Kugel-Ebene:

Ausgangslage: Ebene und Kugel in Koordinatenform.

Berechnung:

$$\text{Aus } E \text{ und } K \text{ folgt } g : \vec{x} = \vec{o}_{M(K)} + S \cdot \vec{n}_E$$

$$g \cap E : a(o_{M(K),x} + n_{E,x}s) + b(o_{M(K),y} + n_{E,y}s) + c(o_{M(K),z} + n_{E,z}s) + d = 0$$

$$|s\vec{x}| = d$$

Diskussion:

$$\begin{array}{ll} d < r & | E \in K \\ d = r & | E \text{ ist Tangentialfläche von } K \\ d > r & | E \notin K \end{array}$$

 s einsetzen, um Punkt S zu berechnen.**Abstandsprobleme**

Punkt-Gerade:

Ausgangslage: Punkt P und Gerade g in Parameterdarstellung

Berechnung:

$$g : \vec{x} = \vec{o} + s \cdot \vec{r} \Rightarrow F(o_x + r_x s; o_y + r_y s; o_z + r_z s;)$$

$$\vec{FP} = \begin{pmatrix} P_x - (o_x + r_x s) \\ P_y - (o_y + r_y s) \\ P_z - (o_z + r_z s) \end{pmatrix}$$

$$\vec{FP} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} P_x - (o_x + r_x s) \\ P_y - (o_y + r_y s) \\ P_z - (o_z + r_z s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = 0$$

$$s \cap |\vec{FP}| : d = d(P, F_g)$$

Punkt-Ebene:

Ausgangslage: Punkt P und Ebene E in Koordinatenform (Lotfusspunktverfahren)

Berechnung:

$$g_{\perp} : \vec{x} = \vec{o}_P + s \cdot \vec{n}_E$$

$$g \cap E : 0 = a(o_{P,x} + n_{E,x}s) + b(o_{P,y} + n_{E,y}s) + c(o_{P,z} + n_{E,z}s) + d$$

$$s \cap \vec{n}_E \hat{=} P_E : d(P; P_E) = |s \cdot \vec{n}_E|$$

Ausgangslage: Punkt P und Ebene E in Koordinatenform (HESSE'sche Normalenform)

Berechnung:

$$E_{\text{HNF}} : 0 = [\vec{x} - \vec{o}_E] \frac{\vec{n}_E}{|\vec{n}_E|}$$

$$P \cap E_{\text{HNF}} : 0 = \frac{ax + by + cz + d}{|\vec{n}_E|} = d(P; E)$$

$$\text{ebenfalls} : d = d(P; E) = |[\vec{o}_P - \vec{o}_E] \cdot \vec{n}_E|$$

Gerade-Gerade:

Ausgangslage: Zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung

Berechnung:

$$\vec{x}_1 = \vec{o}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \quad \vec{x}_2 = \vec{o}_2 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$E_h : \vec{x} = \vec{o}_1 + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$E_{\text{HNF}} : 0 = \frac{|ax + by + cz + d|}{|\vec{n}_E|} = d(g_1; g_2)$$

Ausgangslage: Zwei parallele Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung

Berechnung:

$$\vec{x}_1 = \vec{o}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \quad \vec{x}_2 = \vec{o}_2 + t \cdot \vec{r}_2 \Rightarrow F_g(o_{2,x} + r_{2,x}t; o_{2,y} + r_{2,y}t; o_{2,z} + r_{2,z}t)$$

$$\vec{FO}_1 = \begin{pmatrix} o_{1,x} - (o_{2,x} + r_{2,x}t) \\ o_{1,y} - (o_{2,y} + r_{2,y}t) \\ o_{1,z} - (o_{2,z} + r_{2,z}t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{FO}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} o_{1,x} - (o_{2,x} + r_{2,x}t) \\ o_{1,y} - (o_{2,y} + r_{2,y}t) \\ o_{1,z} - (o_{2,z} + r_{2,z}t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{2,x} \\ r_{2,y} \\ r_{2,z} \end{pmatrix} = 0$$

$$t \cap |\vec{FO}_1| : d = d(P, F_g)$$

Gerade-Ebene:

Ausgangslage: Gerade g in Parameterform und Ebene E in Koordinatenform

Berechnung:

$$g : \vec{x} = \vec{o}_g + s \cdot \vec{r}_g \quad E : ax + by + cz + d = 0$$

$$d = d(g; E) = \frac{|a \cdot o_{g,x} + b \cdot o_{g,y} + c \cdot o_{g,z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ebene-Ebene:

Ausgangslage: Zwei Ebenen E_1 (mit $P \in E_1$ und $P(0; 0; z)$) und E_2 in Koordinatenform

Berechnung:

$$E_1 : ax + by + cz + d_1 = 0 \quad E_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$$

$$d = d(E_1; E_2) = d(P; E_2) = \frac{|a \cdot P_x + b \cdot P_y + c \cdot P_z + d|}{|\vec{n}_E|}$$

3.6 Aufgaben zur Vektorgeometrie**Vektorrechnung**

- Notiere den Vektor von A nach B in Komponentenschreibweise.
 - $A(0; 2)$ und $B(3; 6)$
 - $A(9; -3; 5)$ und $B(5; 5; -3)$
- Berechne den Betrag der jeweiligen Vektoren der vorherigen Aufgabe.
- Führe die einfachen Vektoroperationen durch.
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
 - $-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
 - $4 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Untersuche, ob sich \vec{r} als Linearkombination $s\vec{u} + t\vec{v}$ schreiben lässt.
 - $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$
 - $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Untersuche die Vektoren in den Teilaufgaben a) und b) auf Kollinearität und die Vektoren in Teilaufgaben c) und d) auf Komplanarität.
 - $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4.5 \end{pmatrix}$
 - $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Das Skalarprodukt.
 - Berechne das Skalarprodukt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\phi = 37.87^\circ$
 - Entscheide, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt:
 - $A(5; -2; 0)$, $B(9; 9; -3)$, $C(1; 3; -2)$
 - $A(7; 9; 3)$, $B(-2; 9; 3)$, $C(-4; 3; 5)$
 - Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne den Wert r so, dass der Zwischenwinkel von \vec{u} und \vec{v} ...
 - ... 90° misst.
 - ... 60° misst.
- Das Vektorprodukt.
 - Berechne das Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
 - Zeige, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

- c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
- $A(0; 0), B(4; -7), C(6; -1)$
 - $A(8; 1; 3), B(3; 8; 1), C(1; 3; 8)$
 - $A(3; -1; 7), B(9; 2; 5), C(5; 0; 3)$
8. Gegeben sind die Punkte $A(3; 7; 4), B(2; 1; 8), C(9; 5; 2)$ und $S(0; 0; 10)$. Berechne das Volumen.
- des Spats, der durch Vektor $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ und \overrightarrow{SC} aufgespannt wird.
 - des dreiseitigen Prismas mit der Grundfläche ABC und Kante AS .
 - der dreiseitigen Pyramide mit der Grundfläche ABC und Spitze S .
9. Liegt der Punkt P in der von $U(2; 9; -5), V(8; -6; 4)$ und $W(3; 4; -1)$ gebildeten Ebene E ?
- $P(0; 0; 0)$
 - $P(1; 2; 3)$
 - $P(13; -7; 0)$

Analytische Geometrie

10. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h . Berechne allenfalls den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden.

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h : \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h : \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $g : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ -28 \end{pmatrix}$ und $h : \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -16 \\ -24 \\ 32 \end{pmatrix}$

e) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -23 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h : \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h : t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

11. Bestimme die Koordinatenform der Ebenen, in der nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

12. Gesucht sind die Gleichungen der Kugel K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r .

a) $M(4; 2; -1), r = 5$

b) $M(2; 1; 4), r = \sqrt{3}$

4 Stochastik

4.1 Kombinatorik

Begriffe der Kombinatorik

Binomialkoeffizient

Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird als „n tief k“ gelesen und heisst Binomialkoeffizient. n steht für die Grösse der Menge, aus der gewählt wird und k steht für die Anzahl der Auswahlen / Ziehungen / Plätze.

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt Antwort auf zwei unterschiedliche Fragen:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen k auszuwählen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen $n - k$ Elemente *nicht auszuwählen*?

Daraus folgt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dies kann durch Ausschreiben der Binomialkoeffizienten auch rechnerisch bestätigt werden.

Fakultät

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1 \tag{15}$$

Ausnahme $\Rightarrow 1! = 1$ und $0! = 1$

$n!$ gelesen „n-Fakultät“

Multiplikationsprinzip \Rightarrow Kombination, Variation, Permutation

Bei einer *Permutation* werden alle n Elemente der Grundmenge ausgewählt ($n = k$) und in eine Reihenfolge gebracht. Bei einer *Variation* wird die Reihenfolge der k ausgewählte Elemente berücksichtigt, bei einer *Kombination* hingegen nicht.

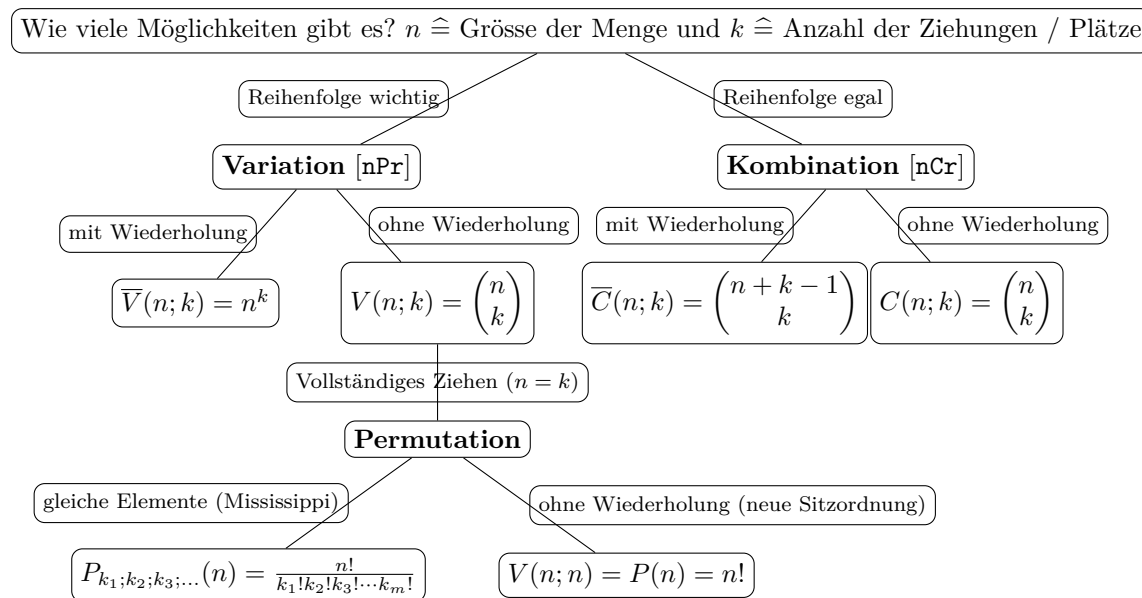


Abbildung 4.1.1: Entscheidungsbaum: Kombinatorik

Beispiele:

1. Ein Zahlenschloss hat 4 Stellen. Jede Stelle kann die Ziffern 0–9 annehmen. Wie viele verschiedene Codes gibt es?

Analyse:

- mögliche Ziffern: $n = 10$
- Stellen: $k = 4$
- Reihenfolge wichtig
- Wiederholung erlaubt

Lösung: $\bar{V}(10; 4) = 10^4 = 10'000$

2. Aus 6 verschiedenen Personen werden 3 für ein Podest (1., 2., 3.) ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Analyse:

- Personen: $n = 6$
- Plätze: $k = 3$
- Reihenfolge wichtig
- keine Wiederholung

Lösung: $V(6; 3) = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 verschiedene Bücher in ein Regal zu stellen?

Analyse:

- alle Elemente werden benutzt
- Reihenfolge wichtig
- $n = k = 5$

Lösung: $P(5) = 5! = 120$

4. Aus 10 Schülern werden 3 für eine Gruppe ausgewählt. Die Reihenfolge ist egal.

Analyse:

- Schüler: $n = 10$
- Auswahl: $k = 3$
- Reihenfolge egal
- keine Wiederholung

Lösung: $C(10; 3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$

5. Es gibt 3 Eissorten (Vanille, Schoko, Erdbeer). Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Kugeln zu wählen? (Sorten dürfen mehrfach gewählt werden, Reihenfolge egal.)

Analyse:

- Sorten: $n = 3$
- Kugeln: $k = 4$
- Wiederholung erlaubt
- Reihenfolge egal

Lösung: $\bar{C}(3; 4) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$

4.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird mit $P(E)$ bezeichnet (P vom lateinischen Wort „probabilitas“, dt. Wahrscheinlichkeit). Für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $\{s\}$ wird $p(s)$ verwendet anstelle von $P(\{s\})$.

Wertebereich von Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines beliebigen Ereignisses E liegt zwischen 0 und 1:

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad \text{für jedes Ereignis } E$$

Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ergebnisraum S : Der Ergebnisraum enthält alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Beispiel Würfel: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Ergebnis s : Ein Ergebnis beschreibt ein einzelnes mögliches Resultat eines Zufallsexperiments.

$$s \in S$$

Beispiel Würfel: $s = \{4\}$

Ereignis E : Ein Ereignis tritt ein, wenn die bestimmten Ergebnisse des Experiments, die im Ergebnisraum sind, auftreten.

$$E \subseteq S \quad \text{und} \quad s \in E$$

Beispiel Würfel: $E = \{2; 4; 6\}$

Besondere Ereignisse:

- **Elementarereignis:** Ein Elementarereignis ist ein Ereignis, das genau aus einem einzelnen Ergebnis besteht.

$$E = s_i$$

Beispiel Würfel: „Augenzahl 4“

- **Gegenergebnis:** Das Gegenereignis \bar{E} zu einem Ereignis E enthält alle Ergebnisse, die nicht zu E gehören. Additionsregel: $P(E) + P(\bar{E}) = 1 \Rightarrow P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$\bar{E} = S \setminus E$$

Beispiel Würfel: bei $E = \{4\}$ ist $\bar{E} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

- **Sicheres Ereignis:** Das Ereignis, das alle Ergebnisse enthält, also der gesamte Ergebnisraum.

$$E = S$$

Beispiel Würfel: $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- **Unmögliches Ereignis:** Das Gegenereignis zum sicheren Ereignis, also die leere Menge \emptyset .

$$E = \emptyset$$

Beispiel Würfel: „Augenzahl 7“

- **Disjunkte Ereignisse:** Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heissen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Ergebnisse haben:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

Beispiel Würfel: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, wenn $E_1 = \{1; 2; 3\}$ und $E_2 = \{4; 5; 6\}$

n -stufige Zufallsversuche bei $n \in \mathbb{N}$

Wird ein Zufallsversuch mehrmals durchgeführt, so nennt man die Anzahl Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist, die *absolute Häufigkeit* von E .

Die *relative Häufigkeit* eines Ereignisses E ist definiert als die Anzahl Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist, dividiert durch die Gesamtzahl aller Durchführungen des Versuchs.

Baumdiagramm und deren Pfadregeln

Werden bei einem Knoten alle Wahrscheinlichkeiten der abgehenden Kanten addiert, so ist die Summe 1 oder 100% (sicheres Ereignis).

Jeder Pfad beschreibt ein mögliches Elementarereignis des mehrstufigen Zufallsexperimentes.

1. Pfadregel Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Elementarereignis eintritt, werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des entsprechenden Pfades miteinander multipliziert.
2. Pfadregel Gehören zu einem Ergebnis mehrere Pfade, so werden die dazugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten addiert.

Begriffe der n -stufigen Zufallsversuche**Ergebnisraum S**

Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch enthält der Ergebnisraum S alle möglichen Kombinationen der Einzelergebnisse. Beispiel Würfel:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}, \quad |S| = 36$$

Elementarereignis E

Ein Elementarereignis besteht aus genau *einem* möglichen Ergebnis des mehrstufigen Zufallsversuchs. Beispiel Würfel:

$$E = \{(2, 5)\}$$

„Beim ersten Wurf fällt eine 2, beim zweiten eine 5.“

Ereignis E

Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraums:

$$E \subseteq S$$

Beispiel Würfel:

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

„Die Summe der beiden Würfe ist 7.“

Gegenereignis \bar{E}

Das Gegenereignis enthält alle Ergebnisse, die nicht zum Ereignis E gehören:

$$\bar{E} = S \setminus E$$

Beispiel Würfel:

$$\bar{E} = \{(i, j) \in S \mid i + j \neq 7\}$$

„Die Summe der beiden Würfe ist nicht 7.“

Es gilt stets:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis s_i eines Zufallsversuchs eine Zahl zu. Die möglichen Werte von X werden mit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bezeichnet.

Beispiel Würfel: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$X(s) = \begin{cases} 1 & \text{falls gerade} \\ 0 & \text{falls ungerade} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$X(1) = 0$$

$$X(2) = 1$$

$$X(3) = 0$$

$$X(4) = 1$$

$$X(5) = 0$$

$$X(6) = 1$$

Also: $P(X = 1) = P(\text{gerade})$ oder allgemein: $P(X = x_k) = P(\{s \in S \mid X(s) = x_k\})$

In der Tabelle:

	j_1	j_2
x_k	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Für $p_k = P(X = x_k)$ mit x_1, x_2, \dots, x_n gilt:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} + p_n = 1$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung (bei Zufallsvariablen)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X zeigt, wie die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf die möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_n von X verteilt ist. Das basiert formal auf Folgendem:

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Jeder Wert x_k wird dabei mit seiner Wahrscheinlichkeit $p_k = P(X = x_k)$ angegeben.

Grafisch lässt sich die Verteilung oft mit einem Stabdiagramm darstellen, wobei die Höhe jedes Stabs die Wahrscheinlichkeit p_k des jeweiligen Werts x_k zeigt.

Gleichverteilung (Laplace-Ansatz)

Der Laplace-Ansatz legt die Wahrscheinlichkeiten für einen Ergebnisraum, der aus n möglichen Ergebnissen besteht, wie folgt fest:

- Jedes Ergebnis s hat Wahrscheinlichkeit $p(s) = \frac{1}{n}$.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist gleich der Anzahl Ergebnisse in E dividiert durch n :

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Kurz: „Anzahl günstige dividiert durch Anzahl mögliche Ergebnisse.“

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung zählt, wie oft ein Ereignis in gleichartigen, unabhängigen Versuchen auftritt. Mit der folgenden Formel kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Beispiel Würfel:

Ein fairer Würfel wird 5-mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Sechsen zu würfeln?

Es gilt:

- Anzahl Versuche: $n = 5$
- Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{6}$
- Zufallsvariable: $X \hat{=}$ Anzahl der geworfenen Sechsen

Daraus folgt:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.161 \Rightarrow 16.1\%$$

Eigenschaften der Binomialverteilung:

- Die Binomialwahrscheinlichkeiten sind vor allem für Werte von k in der Nähe des Erwartungswerts np gross. Sie gehen rasch gegen Null, wenn k sich von np entfernt und n gross ist.
- Wenn n gross und p nicht sehr nahe bei 0 oder 1 ist, sind die Binomialwahrscheinlichkeiten annähernd symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse bei $k = np$, und die oberen Enden der Stäbe liegen auf einer glockenförmigen Kurve.
- Bei festem p nimmt die Breite dieser Glockenkurve mit wachsendem n langsam zu.
- Für festes n und variables p ist die Glockenkurve am breitesten für $p = \frac{1}{2}$.

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
Höchste x Erfolge	$P(X \leq x) = \sum_{x=0}^x \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Weniger als x Erfolge	$P(X < x) = \sum_{x=0}^{x-1} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Mindestens k Erfolge	$P(X \geq k) = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Mehr als k Erfolge	$P(X > k) = \sum_{x=k+1}^n \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
Mindestens x_L und höchstens x_R Erfolge	$P(x_L \leq X \leq x_R) = \sum_{x=x_L}^{x_R} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$

Tabelle 4.2.1: Wahrscheinlichkeit bei ungenauer Anzahl Erfolgen

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X ist der durchschnittliche Wert, den X langfristig annimmt, wenn man den Zufallsversuch sehr oft wiederholt.

Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable X ist definiert als

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_{n-1}p_{n-1} + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_kp_k$$

Dabei entsprechen $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ den Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Zufallsvariable X ihre möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} und x_n annimmt.

Erwartungswert der Binomialverteilung:

Eine binomial(n, p)-verteilte Zufallsgrösse X hat den Erwartungswert $E(X) = np$.

Beispiel Würfel: Erwartungswert eines fairen Würfels.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

„fares“ Spiel

Ein faires Spiel ist ein Zufallsspiel, bei dem der langfristige durchschnittliche Gewinn oder Verlust null beträgt, also weder die eine noch die andere Partei einen Vorteil hat.

$$E(X) \begin{cases} < 0, & \text{Spiel zugunsten des Hauses} \\ = 0, & \text{fares Spiel} \\ > 0, & \text{Spiel zugunsten des Spielers} \end{cases}$$

Beispiel Würfel:

Spielregel: Gerade Zahl $\hat{=}$ Gewinn (1 CHF) und ungerade Zahl $\hat{=}$ Verlust (-1 CHF), daraus folgt...

$$X = \begin{cases} 1, & \text{gerade Zahl} \\ -1, & \text{ungerade Zahl} \end{cases}$$

Also:

$$P(X = 1) = \frac{3}{6} = 0.5$$

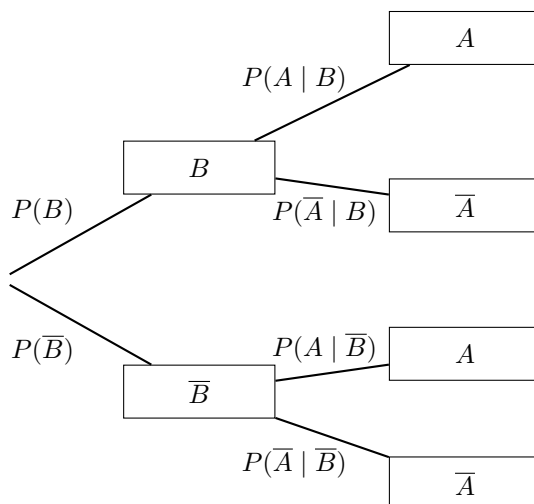
$$P(X = -1) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Daraus folgt:

$$E(X) = 1 \cdot 0.5 + (-1) \cdot 0.5 = 0 \hat{=} \text{fares Spiel}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wird als $P(A|B)$ notiert. Sie ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn bekannt ist, dass B eingetreten ist.



Wenn $P(A|B)$ und $P(B)$ bekannt sind, zum Beispiel in einem Baumdiagramm, dann berechnet sich $P(A \cap B)$ gemäss der Multiplikationsregel:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Umgekehrt geht auch (bei $P(B) > 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \hat{=} \text{Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit}$$

Für den Fall $P(B) = 0$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht definiert. Die Einzelwahrscheinlichkeiten wären dementsprechend:

$$P(\{s\}|B) = p(s|B) = \begin{cases} \frac{p(s)}{P(B)} & \text{falls } s \in B \\ 0 & \text{falls } s \notin B \end{cases}$$

Satz von Bayes

Der Satz von Bayes erlaubt es, bedingte Wahrscheinlichkeiten umzudrehen: Aus $P(A|B)$ lässt sich $P(B|A)$ berechnen, wenn die Randwahrscheinlichkeiten ($P(A)$ bzw. $P(B)$) bekannt sind. Er kann sowohl zweistufig als auch allgemein genutzt werden.

$$\text{zweistufig } P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})}$$

$$\text{allgemein } P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Abhängige und unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ heissen unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses das Eintreten des anderen nicht beeinflusst. Das bedeutet formal, dass eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $P(A|B) = P(A) \hat{=} \text{Die Wahrscheinlichkeit von } A \text{ ändert sich nicht, wenn } B \text{ eintritt.}$

2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \hat{=}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, ist das Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten.
3. $P(B|A) = P(B) \hat{=}$ Die Wahrscheinlichkeit von B bleibt gleich, unabhängig davon, ob A eintritt (symmetrisch).
4. $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, falls $P(B) < 1 \hat{=}$ Tritt gleich wahrscheinlich ein, egal ob B eintritt oder nicht.

Abhängigkeit bedeutet, dass das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des anderen verändert: $P(A|B) \neq P(A)$ oder $P(B|A) \neq P(B)$.

A Anhang

Beweisführungen

Binomische Formel

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
 &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\
 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\
 &= a \cdot a + a \cdot (-b) - b \cdot a - b \cdot (-b) \\
 &= a^2 - ab - ba + b^2 \\
 (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a-b) &= a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) \\
 &= a^2 - ab + ab - b^2 \\
 (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \\
 x^2 + \frac{bx}{a} &= -\frac{c}{a} \\
 x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Ableitungsregeln

Summen- und Differenzenregel:

$$\begin{aligned}
 (f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - [f(x) \pm g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - f(x) \mp g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) \pm g(x+h) \mp g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x) \pm g'(x) \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Faktorregel:

$$\begin{aligned}(c \cdot f(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot f'(x) \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Quotientenregel:

Schritt 1:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)} \right] \\ &= \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Integrationsregel

Beweis durch Ableitung. Es gilt:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F_a'(x) = f(x)$$

Potenzregel:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' \\ f(x) &= \frac{(n+1) \cdot x^n}{n+1} + 0 \\ &= x^n \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Summen- und Differenzenregel:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) + C_1 \pm G(x) + C_2 \quad \text{q.e.d.}$$

Faktorregel:

$$(a \cdot (F(x) + C))' = a \cdot (F(x) + C)' = a \cdot f(x) \quad \text{q.e.d.}$$

Lineare Substitution:

$$\left(\frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C \right)' = \frac{1}{a} \cdot F'(ax + b) + 0 = \frac{1}{a} \cdot a \cdot f(ax + b) = f(ax + b) \quad \text{q.e.d.}$$

Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit i ist eine Zahl, deren Quadrat -1 ist. Es gilt somit:

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein algebraisches Binom $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. Wobei...

- ... der Realteil: $\operatorname{Re}(x + iy) = x$ beträgt.
- ... der Imaginärteil: $\operatorname{Im}(x + iy) = y$ beträgt.

Punktoperation in der Normalform

Multiplikation in Normalform:

$$(a + ib) \cdot (x + iy) = ax - by + i(ay + bc)$$

Division in Normalform:

$$\frac{a + ib}{x + iy} = \frac{(ax + by) + i(bx - ay)}{x^2 + y^2}$$

Die GAUSS'sche Zahlenebene und die Polarform

In der GAUSS'sche Zahlenebene werden die komplexen Zahlen in einem kartesisch Koordinaten abgebildet, indem der Imaginärteil auf der y -Achse und der Realteil auf der x -Achse dargestellt ist. Jeder Punkt in der GAUSS'schen Zahlenebene kann in der Polarform dargestellt werden.

Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ kann in der Form...

$$z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = r \operatorname{cis}(\phi)$$

... dargestellt werden. Wobei...

- ... Betrag $\hat{=} r = |z|$
- ... Argument $\hat{=} \phi = \arg(z)$

Die Umrechnung zwischen der Normal- zur Polarform verläuft graphisch. Umgekehrt gibt es folgende Formeln:

$$x = r \cos(\phi) \qquad y = r \sin(\phi)$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarform

Es gilt: $z = r \operatorname{cis}(\alpha)$ und $w = q \operatorname{cis}(\beta)$

$$z \cdot w = r q \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{q} \operatorname{cis}(\alpha - \beta)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\alpha)$$

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n \cdot \alpha)$$

$$\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\alpha)$$

$$-z = r \operatorname{cis}(\alpha + 180^\circ)$$

Die Exponentialform

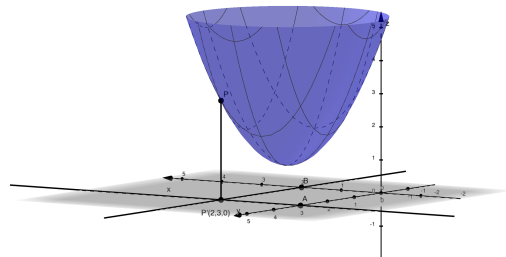
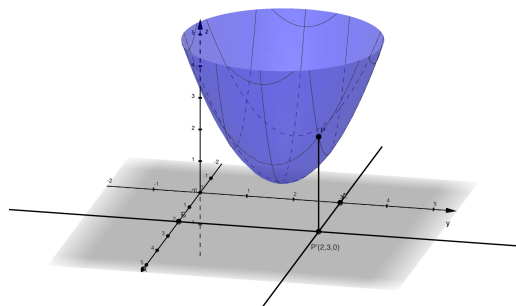
$$z = r e^{i\phi}$$

Formel von Euler:

Es gilt $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$

Funktionen zweier Variablen

Das folgende Kapitel basiert auf die Funktion $f(x; y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$. Der Graph besteht aus allen Punkten $P(x; y; z)$, deren Koordinaten die Gleichung $z = f(x; y)$ erfüllen.



Man schneidet den Graphen mit Ebenen, die parallel zur xz - bzw. yz -Ebene verlaufen. In einer solchen Ebene ist eine Variable konstant und nur noch variabel. Zum Beispiel: Schnitt mit $y = 3$.

$$f(x) = x^2 + 9 - 2x - 12 + 6 = x^2 - 2x + 3$$

Man kann die Steigung in x -Richtung ermitteln.

$$f'(x) = 2x - 2$$

Im Punkt $P(2; 3; 3)$ beträgt die Steigung in x -Richtung 2

$$x = 2$$

Im Punkt $P(2;3;3)$ beträgt die Steigung in y -Richtung.

Partielle Ableitung

Funktion $f(x; y)$

Lässt man y konstant und betrachtet x als variabel und leitet nach dieser Variablen ab, so spricht man von der partiellen Ableitung nach x .

Man schreibt: $\frac{\partial}{\partial x} f(x; y)$

Analog: Partielle Ableitung $y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x; y)$

Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= x^3 y^2 - xy + 2 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x; y) &= 3x^2 y^2 - y \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x; y) &= 2x^3 y - x \end{aligned}$$

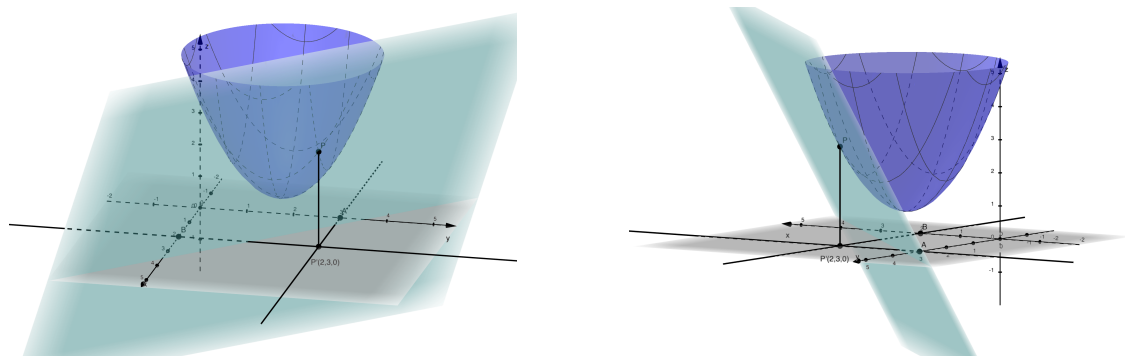
Finde den Extrempunkt von $f(x; y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$

Es gilt: Im Extrempunkt sind beide partielle Ableitungen null.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x; y) &= 2x - 2 \Rightarrow \text{I } 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x; y) &= 2y - 4 \Rightarrow \text{II } 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2\end{aligned}$$

Daraus folgt der Punkt $P(1; 2)$.

Tangentialebene



Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0) \end{pmatrix}$ verlaufen in der Tangentialebene.

$$\begin{aligned}T : \vec{r}(s; t) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0; y_0) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0) \end{pmatrix} \\ \vec{r}(s; t) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0; y_0) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0; y_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0; y_0) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} = \vec{n}_T\end{aligned}$$

In diesem Fall hat die Tangentialebene die Parameterdarstellung.

$$\begin{aligned}f(x; y) &= x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = z \\ P'(2; 3; 0) & \quad P(2; 3; 3)\end{aligned}$$

$$f_x = 2x - 2 \Rightarrow f_x(2; 3) = 2$$

$$f_y = 2y - 4 \Rightarrow f_y(2; 3) = 2$$

$$\vec{n}_T = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T : 0 = -2x - 2y + z + d$$

$$P \cap T : 0 = -2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 3 + d \Rightarrow d = 7$$

$$T : 0 = -2x - 2y + z + 7$$

Richtungsableitung

Wie gross ist die Steigung in Richtung eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$? (Höhenunterschied in Richtung \vec{e}_1 ist $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0)$)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \\ \Delta z &= a_1 f_x + a_2 f_y \\ m_{\vec{a}} &= \frac{a_1 f_x + a_2 f_y}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Definition: $\nabla f(x_0; y_0) := \begin{pmatrix} f_x(x_0; y_0) \\ f_y(x_0; y_0) \end{pmatrix}$

Ebenfalls gilt $m_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \nabla f}{|\vec{a}|}$
wobei ∇ „Nabla“ heisst.

Richtung der Höhenlinie \vec{h}

\vec{h} steht senkrecht auf \vec{n} und senkrecht auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{h}$$

Wir suchen die Richtung der grössten / kleinsten Steigung, wobei \vec{f} die Richtung der Falllinie entspricht.

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \vec{h} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -f_y^2 - f_x^2 \end{pmatrix} \hat{=} \text{steilster Vektor abwärts} \\ &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_y^2 + f_x^2 \end{pmatrix} \hat{=} \text{steilster Vektor aufwärts}\end{aligned}$$

$\nabla f(x; y) = \begin{pmatrix} f_x(x; y) \\ f_y(x; y) \end{pmatrix}$ ist die Richtung des steilsten Aufstiegs.

Kritische Punkte

Punkte, in denen der Gradient $\nabla f = \vec{0}$ ist, werden kritische Punkte genannt. In diesen Punkten ist die Tangentialebene horizontal. Dies ist auf drei Arten möglich:

- Hochpunkte (Maximum)
- Tiefpunkt (Minimum)
- Sattelpunkt

Man entscheidet mit den zweiten partiellen Ableitung. Davon gibt es vier verschiedene:

$$f_{xx} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$$

$$f_{xy} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$$

$$f_{yx} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$$

$$f_{yy} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$$

Die Hesse-Matrix H der Funktionen f ist

$$H := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von H entsprechen λ_H

	Variante 1	Variante 2
Hochpunkt	$\lambda_H < 0$	$\det H > 0$ und $f_{xx} < 0$
Sattelpunkt	λ_H haben verschiedene Vorzeichen und $\lambda_H \neq 0$	$\det H < 0$
Tiefpunkt	$\lambda_H > 0$	$\det H > 0$ und $f_{xx} > 0$
unentscheidbar	$\lambda_H = 0$	$\det H = 0$

Tabelle 4.2.2: Bestimmung von kritischen Punkten bei Funktionen zweier Variablen

Der binomische Lehrsatz (Paper)

Vorwort

Die Algebra und Stochastik könnte gedanklich nicht weiter sein. Viele Lehrpläne beginnen mit der Algebra und enden mit der Stochastik. Dennoch gibt es eine Auffälligkeit: die binomischen Formeln, der Binomialkoeffizient, die Binomialverteilung. Namentlich sind sie gleich, aber mathematisch ist das sozusagen die magische Brücke zwischen der Algebra und der Stochastik, welche in diesem Paper genauer untersucht wird.

Der binomische Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

wobei der Binomialkoeffizient durch die Fallunterscheidung

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{für } 0 \leq n < k \end{cases}$$

definiert ist. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002, S.129ff)

Anwendung in der Algebra

Die Vereinfachung von Binomen zweiten Grades erfolgt entweder typischerweise durch die Termumformung oder auch durch die Anwendung des binomischen Lehrsatzes. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002, S.125ff; Durandi u. a. 2022, S.20, S.43)

Beweisführung durch Termumformung

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= (a \pm b)(a \pm b) \\ &= a \cdot a \pm a \cdot b \pm b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 \pm ab \pm ab + b^2 \\ &= a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

Beweisführung durch Lehrsatz

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^2 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ &= \frac{2!}{0!(2-0)!} a^2 b^0 + \frac{2!}{1!(2-1)!} a^2 b^1 + \frac{2!}{2!(2-2)!} a^0 b^2 \\ &= \frac{2!}{2!} a^2 b^0 + \frac{2!}{1!} a^1 b^1 + \frac{2!}{2!} a^0 b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} (-b)^k = \binom{2}{0} a^2 (-b)^0 + \binom{2}{1} a^2 (-b)^1 + \binom{2}{2} a^0 (-b)^2 \\ &= \frac{2!}{0!(2-0)!} a^2 (-b)^0 + \frac{2!}{1!(2-1)!} a^2 (-b)^1 + \frac{2!}{2!(2-2)!} a^0 (-b)^2 \\ &= \frac{2!}{2!} a^2 (-b)^0 + \frac{2!}{1!} a^1 (-b)^1 + \frac{2!}{2!} a^0 (-b)^2 \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

	Algebra	Stochastik
a	Variable	Misserfolg ($1 - p$)
b	Variable	Erfolg (p)
$\binom{n}{k}$	Koeffizienten	Anzahl Anordnungen
$a^{n-k}b^k$	Zwischenterme	P eine Folge

Tabelle 4.2.4: Analogie: Binomischer Lehrsatz in der Algebra und Stochastik

In beiden Fällen werden, abstrakt formuliert, alle Möglichkeiten zusammengerechnet. Sei es bei den Binomen oder auch bei der Binomialverteilung. Als grosser Indiz dafür reicht schon der Exponent $n - k$, der schon einiges aufzeigt.

Die Gerade (Paper)

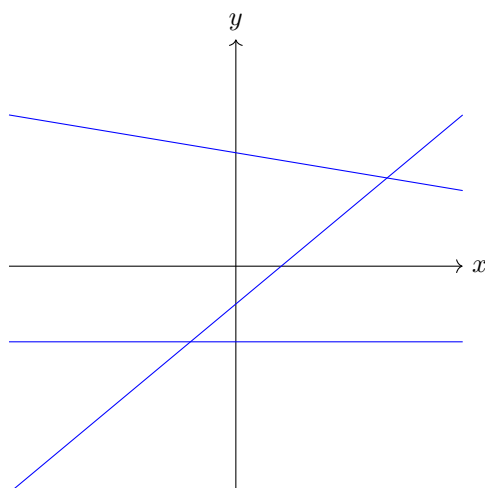
Vorwort

Die Gerade kennt man. Auch aus dem Alltag. Etwas ist gerade, also ist dies eine Gerade. In der Mathematik ist die Gerade ebenfalls bekannt. Aber in zwei Kontexten: Analysis und Geometrie. Beide erfüllen verschiedene Zwecke und werden verschieden formuliert, aber das Ergebnis ist das Gleiche. In dieser Arbeit wird der Zusammenhang der Geraden in der Analysis und in der Geometrie untersucht.

Die Gerade

Eine Gerade ist ein Objekt, welche grundsätzlich eine gerade, unendlich lange, unendlich dünne und in beide Richtungen unbegrenzte Linie ist. So lautet (sinngemäss) die Definition von Euklid. Grundlegend handelt es sich um eine Gerade mit einer Länge, aber ohne einer Breite. Heutzutage ist die Gerade ein Objekt ohne innere Eigenschaften, lediglich die Beziehungen zu anderen Geraden, Punkten und Ebenen sind von Bedeutung. (Wikipedia 2026)

Geraden können folgendermassen im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden.



Anwendung in der Analysis

Zwei veränderliche Grössen können einander zugeordnet werden, wenn sie voneinander abhängig sind. [...] Eine Funktion ordnet einem Eingangswert genau einen Ergebniswert zu. Der Ergebniswert wird Funktionswert (typischerweise y) genannt. Diese Zuordnung muss eindeutig sein, d.h. einem Eingangswert gehört genau ein Funktionswert. (Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002; S.199)

Genauer gesagt: Der Graph ist die Gerade mit Steigung m und Ordinatenabschnitt q . (Durandi u. a. 2022; S.22).

Die Funktionsgleichung

Die Funktionsgleichung der Geraden entspricht,

$$f(x) = mx + q$$

wobei $m \neq 0$ entspricht und es eine Nullstelle

$$x_0 = -\frac{q}{m}$$

gibt.

Aus dieser Funktionsgleichung kann man die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

und den y -Achsenabschnitt q ablesen.

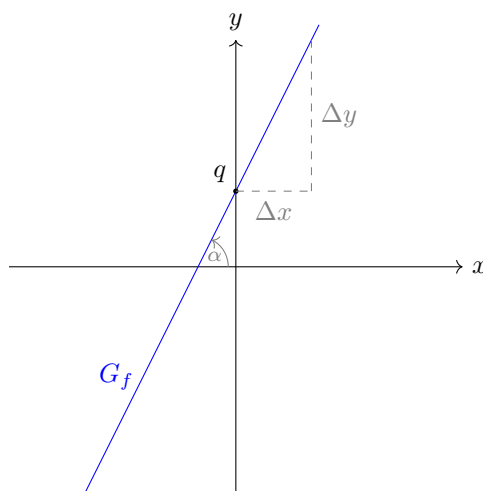
Für Funktionsgleichungen gelten folgende Regeln:

1. Lineare Funktionen haben genau eine Variable (hier: x).
2. Die Variable einer linearen Funktion hat die Potenz Eins ($x^1 = x$).
3. Die Variable einer linearen Funktion hat einen *Koeffizient* m .
4. Lineare Funktionen können zusätzliche Konstante q haben.
5. Die Grundmenge von linearen Funktionen ist in der Regel \mathbb{R} .

(Delventhal, Dipl. Ing. Kissner und Kulick 2002; S.204)

Darstellung

Eine Gerade kann mit seinen Komponenten aus der Funktionsgleichung $g : y = mx + q$ abgebildet werden. Hier am Beispiel von G_f von $f(x) = mx + q$. Zu sehen sind q (y -Achsenabschnitt) und m (in Form des Steigungsdreiecks und des Winkels α).



Gebrauch

An der Geraden kann man die Steigung und den y -Achsenabschnitt (Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse) berechnen.

Die Gerade selbst kann auch Objekt der Berechnung sein. Zwei Anwendungen wären...

1. ... Tangente:

Die allgemeine Form der Tangente einer Funktion $f(x)$ entspricht,

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

wobei $f'(x)$ der ersten Ableitung und somit der Steigung entspricht.

2. ... Polstellen: Die Polstellen bei einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x)$ entspricht,

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

wobei die Polstelle auch als Nullstelle der Nennerfunktion $g(x)$ betrachtet werden kann.

Anwendung in der Geometrie

Die Geradengleichung

In der Geometrie wird die Gerade durch Vektoren dargestellt, wie Vektoren auch andere Objekte im Raum bzw. in der Ebene darstellen. Die Gleichung, die diese Darstellung am besten wiedergibt, ist die Parameterdarstellung.

$$g : \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB}$$

mit:

- \vec{OA} : Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunkts).
- \vec{AB} : Richtungsvektor (Verbindungsvektor des Stützpunkts und eines anderen Punkts).
- s : Parameter, welchen den Richtungsvektor unendlich lang streckt und daraus nun die Gerade folgt.

Nebst dieser Darstellung gibt es auch die Koordinatenform,

$$ax + by + c = 0$$

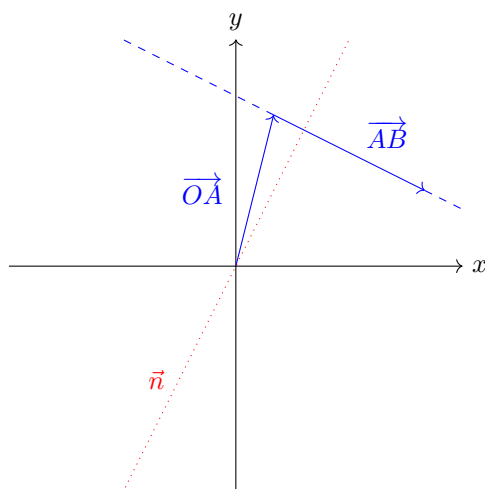
dessen Parameter die Komponente der Normalen

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

darstellen.

Darstellung

Die Gerade können entweder in einer Ebene (zweidimensional) oder im Raum (dreidimensional) dargestellt werden. Dafür werden die Vektoren aus der Parameterform analog in ein Koordinatensystem übernommen. Die Darstellung der Geraden aus der Koordinatenform funktioniert nur in der Ebene, da der Normalenvektor nur zwei Komponente hat und somit nur zweidimensional sein kann.



Gebrauch

An der Geraden selbst erreicht man jeden Punkt auf der Geraden durch Vektoraddition mit einem bestimmten Parameter s_0 .

Die Gerade ist zudem auch selbst das Objekt der Berechnungen. Ein grosser Aufgabenbereich sind Abstandsprobleme, in denen der Abstand eines Geradenpunkts an einem Objekt (bspw. eine Ebene) von einem anderen Geradenpunkt an einem anderen Objekt (bspw. ein Punkt) gemessen wird.

Der Zusammenhang

Die resultierende Gerade ist in beiden Anwendungen dasselbe und entsprechen ebenfalls der Definition. Die Funktionsgleichung aus der Analysis und die Geradengleichung sind sogar identisch bzw. umformbar, was den Zusammenhang der Geraden aus den beiden Themenbereichen endgültig mathematisch unterstreicht.

Geometrie \rightarrow Analysis

$$\begin{aligned}
 g : \vec{x} &= \vec{OA} + s \cdot \underbrace{\vec{AB}}_{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}} \\
 \Rightarrow \vec{n} &= \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow 0 &= (-\Delta y)x + (\Delta x)y + c = ax + by + c \\
 \Rightarrow 0 &= ax + by + c \Rightarrow y = -\frac{ax + c}{b} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Analysis \rightarrow Geometrie

$$\begin{aligned}
 y &= mx + q \Rightarrow y = ax + c \\
 0 &= ax - y + c \quad \text{Koordinatenform q.e.d.} \\
 \Rightarrow \vec{n} &= \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\vec{r}}_{\vec{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\
 \vec{x} &= \vec{OA} + s \cdot \vec{AB}
 \end{aligned}$$

Der Ortsvektor \overrightarrow{OA} ist schlichtweg ein beliebiger Punkt, der auf der Ursprungsgeraden liegt.

Fazit

Diese Beweisführungen schlussendlich, dass die Gerade aus der Analysis und die Gerade aus der Geometrie im Prinzip dasselbe und auch untereinander umformbar sind.

Übergang in die Lineare Algebra

Matrizen

Ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten heisst $m \times n$ -Matrix. Matrizen werden mit Grossbuchstaben ($A; B; C; \dots$) bezeichnet. Die einzelnen Einträge der Matrix sind Komponenten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$m \times n$ heisst Grösse der Matrix. Ist $m = n$, so heisst die Matrix quadratisch.

Matrizenoperationen

Matrizenaddition / -subtraktion

Die Summe bzw. Differenz zweier Matrizen gleicher Grösse werden berechnet, indem die Komponenten an der gleichen Stelle addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\begin{aligned} A \pm B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij}) \end{aligned} \quad (17)$$

Es gelten: Kommutativgesetz und Assoziativgesetz.

$$A + B = B + A \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (18)$$

Skalare Multiplikation

Die Multiplikation einer Matrix wird berechnet, indem ein Skalar mit jeder Komponente multipliziert wird.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = k(a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) \quad (19)$$

Es gelten: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz.

$$kA = Ak \quad k(l \cdot A) = (k \cdot l)A \quad k(A + B) = kA + kB \quad (20)$$

Matrizenmultiplikation

Das Produkt einer $l \times m$ -Matrix mit einer $m \times n$ -Matrix ist eine $l \times n$ -Matrix, bei der das Skalarprodukt der i -ten Zeile der ersten Matrix mit der j -ten Spalte der zweiten Matrix.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = A \cdot B \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1m}b_{mn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2m}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2m}b_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}b_{11} + a_{l2}b_{21} + \cdots + a_{lm}b_{m1} & a_{l1}b_{12} + a_{l2}b_{22} + \cdots + a_{lm}b_{m2} & \cdots & a_{l1}b_{1n} + a_{l2}b_{2n} + \cdots + a_{lm}b_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix} = C
 \end{aligned} \tag{21}$$

Transposition

Wenn $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix ist, ist die transponierte Matrix $A^T = (a_{ji})$ eine $n \times m$ -Matrix. Die Zeilen von A werden zu Spalten von A^T und die Spalten von A werden zu Zeilen von A^T .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Die vier Eigenschaften der Transposition einer Matrix:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T = B^T \cdot A^T$

Inversion I

Bei einer Matrix A und seiner Inversion A^{-1} gilt: $A \cdot A^{-1} = E$. E entspricht der Einheitsmatrix.

Gauss-Jordan-Algorithmus zum Bestimmen der Inversen einer Matrix.

Man ergänzt die $n \times n$ -Matrix A zu einer $n \times 2n$ -Matrix, indem man rechts die Einheitsmatrix einfügt. Man verwandelt diese Matrix in eine Matrix, in welcher die Einheitsmatrix steht. D.h. dort, wo A steht, steht nachher E und dort wo E steht, wird A^{-1} stehen.

Zulässige Schritte sind:

1. Eine Zeile mit einer Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.
2. Zwei Zeilen vertauschen.
3. Eine Zeile ersetzen durch eine Linearkombination von sich und einer anderen Zeile.

Determinanten

Die Determinante einer Matrix M gibt den Faktor an, um den sich im zweidimensionalen der Flächeninhalt und im dreidimensionalen das Volumen unter der Abbildung vervielfacht.

Idee der Determinante

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ \text{II} \quad a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{array} \quad (23)$$

folgt die Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

woraus die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c} \quad (25)$$

folgt.

Das lineare Gleichungssystem wird allgemein gelöst, indem der Schritt $a_{21} \cdot \text{I} - a_{11} \cdot \text{II}$ durchgeführt wird.

$$\begin{aligned} a_{21}a_{12}y - a_{11}a_{22}y &= a_{21}c_1 - a_{11}c_2 \\ y(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) &= a_{21}c_1 - a_{11}c_2 \\ y &= \frac{a_{21}c_1 - a_{11}c_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}} \end{aligned} \quad (26)$$

Der charakteristische Term $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$ ist entscheidend dafür, ob das Gleichungssystem eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat.

Definition: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heisst Determinante der Matrix A .

$$\begin{array}{ll} \det A \neq 0 \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{c} & \text{hat genau eine Lösung, reguläre (invertierbare) Matrix} \\ \det A = 0 \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{c} & \text{hat keine oder unendlich viele Lösungen, singuläre Matrix} \end{array} \quad (27)$$

Determinantenbestimmung

Determinante einer 2×2 -Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (28)$$

Determinante einer 3×3 -Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \quad (29)$$

Es gelten:

$$\begin{aligned} \det AB &= \det A \cdot \det B \\ \det A^T &= \det A \end{aligned} \quad (30)$$

Inversion IIInverse einer 2×2 -Matrix:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (31)$$

Inverse einer 3×3 -Matrix:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \quad (32)$$

Lineare Gleichungssysteme **2×2 -Gleichungssystem**

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1 \\ a_2x + b_2y &= k_2 \end{aligned} \quad (33)$$

folgen die Determinanten

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

mit den folgenden Bedingungen.

$$\begin{aligned} D \neq 0 & \quad \text{eindeutig lösbar} \quad x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D} \\ D = 0, D_x \vee D_y \neq 0 & \quad \text{keine Lösungen} \\ D = D_x = D_y = 0 & \quad \text{unendliche viele oder keine Lösungen} \end{aligned} \quad (35)$$

 3×3 -Gleichungssystem

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned} \quad (36)$$

folgen die Determinanten

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_z = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (37)$$

mit den folgenden Bedingungen.

$$\begin{aligned} D \neq 0 & \quad \text{eindeutig lösbar} \quad x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \\ D = 0, D_x \vee D_y \vee D_z \neq 0 & \quad \text{keine Lösungen} \\ D = D_x = D_y = D_z = 0 & \quad \text{unendliche viele oder keine Lösungen} \end{aligned} \quad (38)$$

 $n \times n$ -Gleichungssystem

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (39)$$

folgt die Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (40)$$

woraus die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (41)$$

folgt.

Homogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$

Lösungen:

- $\vec{x} = \vec{0}$ ist immer Lösung.
- Ist $\det A = 0$, so gibt es unendlich viele Lösungen.

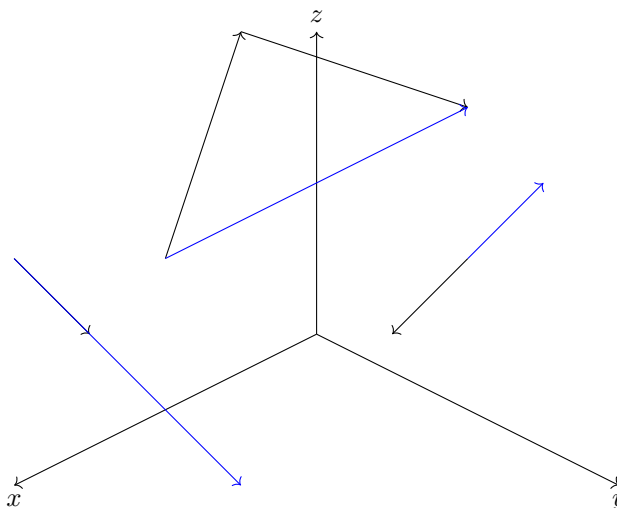
Inhomogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

Lösungen:

- Ist $\det A \neq 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
- Ist $\det A = 0$, so gibt es keine oder unendlich viele Lösungen.

Vektorräume

Sowohl die Vektoraddition als auch die skalare Multiplikation sind Vektoroperationen, die in einem zwei- bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem gebraucht werden. Jedoch geschehen diese Operationen in einem eingeschränkten Rahmen, über die man bei trivialen Rechnungen nicht spricht. Die Einschränkung, die diese Operationen überhaupt erlauben, heissen Vektorräume.



Ein Vektorraum V über einem Körper K (Skalare aus \mathbb{R} , die in V gebraucht werden) ist eine Menge von Vektoren, auf der zwei Operationen definiert sind: die Vektoraddition durch $+$: $V \times V \rightarrow V$ und die skalare Multiplikation durch \cdot : $K \times V \rightarrow V$.

Zusätzlich müssen für alle Vektoren im Vektorraum V ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$) und alle Skalare im Körper K ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) folgende Axiome erfüllen:

1. Eindeutiges Element $0 \in V$, so dass $0 + \vec{v} = \vec{v} + 0 = \vec{v}$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
4. Eindeutiges Element $-\vec{v} \in V$, so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = 0$
5. $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
6. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
7. $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$
8. Eindeutiges Element $1 \in K$, so dass $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Die Elemente eines Vektorraums V nennt man per Definition Vektoren.

Basis

Die *Basis* (auch: minimales Erzeugendensystem) ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren \vec{b} ($\{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\} \subset V$), die den gesamten Vektorraum V bilden, da jeder Vektor \vec{v} ($\vec{v} \in V$) durch eine Linearkombination der (ineinander) linear unabhängigen Vektoren b mithilfe des Skalars λ ($\{\lambda_1; \dots; \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$) ausgedrückt werden muss.

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i \quad (42)$$

Dimensionen und Standardbasis

Der grösste Index n des *Basisvektors* \vec{b} entspricht der *Dimension* des erzeugten Vektorraumes, welches oft mit $\dim V = n$ beschrieben werden kann.

Die Basisvektor, die den Einheitsvektoren entsprechen, nennt man *Standardbasis*. Beispiel in...

- ... \mathbb{R}^2 : $\{(1, 0); (0, 1)\}$
- ... \mathbb{R}^3 : $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
- ... \mathbb{R}^4 : $\{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$

Basiswechsel

Beim Basiswechsel wird die Basis gewechselt, wodurch die Skalar sich auch ändern. So folgt aus

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i \quad (43)$$

die Linearkombination mit der neuen Basis,

$$\vec{v} = \lambda'_1 \vec{b}'_1 + \lambda'_2 \vec{b}'_2 + \dots + \lambda'_n \vec{b}'_n = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \vec{b}'_i \quad (44)$$

wofür eine Transformationsmatrix gebraucht wird.

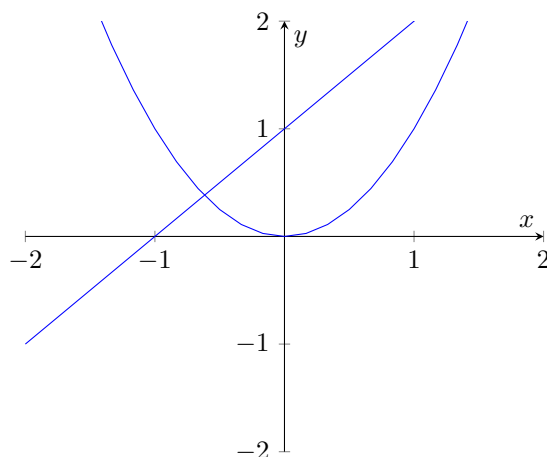
$$T_{B'}^B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Lineare Hülle

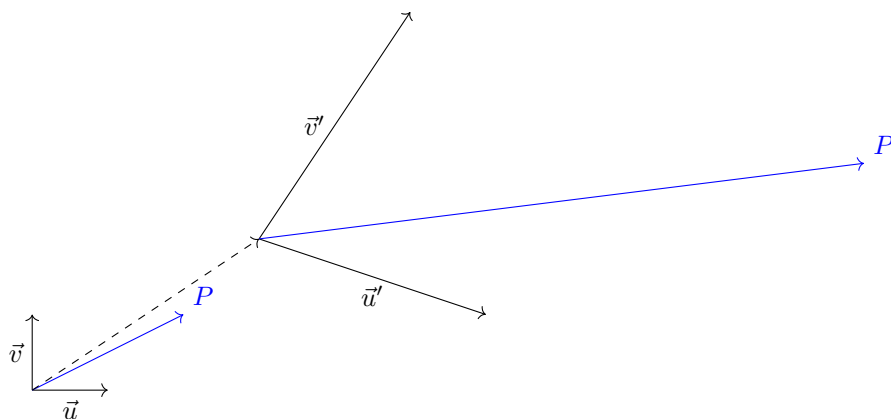
Ein Vektorraum V hat m linear unabhängige Vektoren \vec{v} ($\vec{v}_1; \dots; \vec{v}_m \subset V$), wobei $m \leq \dim V$ entspricht und als Teilmenge eines Vektorraums noch ein Vektorraum bildet, was dem *Untervektorraum* entspricht. Dieser Untervektorraum wird ebenfalls als lineare Hülle bezeichnet und wird als $\text{span}(v_1; \dots; v_m)$ notiert.

Abbildungen

Eine Abbildung ist, wenn etwas anders abgebildet wird. Diese Definition ist auf keiner Weise mathematisch, aber das Prinzip kennt man bereits aus der Analysis. Die Funktionen. Bei einer Funktion wird ein Element aus dem Definitionsbereich auf ein Element im Zielbereich abgebildet oder kurzgesagt: jedem x -Wert wird ein y -Wert zugeordnet oder auch $x \mapsto f(x)$ (dadurch sind Funktionsgleichungen auch eine Zuordnungsschreibweise). Die Funktionen sind jedoch eine Spezialfall der Abbildungen. Im folgenden geht es vorerst und vor allem um affine Abbildungen.



Abbildungen, in diesem Fall affine Abbildungen und keine Funktionen, sind geometrische Transformationen, die Punkte, Gerade und Ebenen abbilden, wobei Parallelität und Verhältnisse erhalten bleiben. Kurzgefasst sind affine Abbildungen paralleltreu, geradentreu und teilverhältnistreu. Graphisch kann man die affine Abbildung im \mathbb{R}^2 wie in der folgenden Grafik (bspw.) darstellen.



Folgerichtig kann man sagen, dass

$$\begin{aligned} P &\mapsto P' \\ \vec{v} &\mapsto \vec{v}' \\ \vec{u} &\mapsto \vec{u}' \end{aligned} \tag{46}$$

entspricht, woraus die Definition der Abbildung

$$f : A \rightarrow A' \tag{47}$$

folgt.

Bei Abbildungen gibt es zusätzlich folgende Terminologie:

- Ein **Fixpunkte** einer Abbildung ist ein Punkt, der unter der Abbildung unverändert bleibt.
- Eine **Fixpunktgerade** ist eine Gerade, die aus Fixpunkten besteht, d.h. jeder Punkt der Gerade wird durch die Abbildung auf sich selber abgebildet.
- Eine **Fixgerade** ist eine Gerade, die auf sich selber abgebildet wird, die einzelnen Punkten auf der Geraden verschieben sich allerdings.

Abbildungsoperationen

Umkehrungen

Bildet eine Abbildung

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{b} \tag{48}$$

einen Punkte P auf P' ab, so bildet die *Umkehrabbildung* wieder P' auf P ab. Die Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung erhält man durch einfaches Umformen der Gleichung,

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{x}' - \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot (\vec{x}' - \vec{b}) \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{x}' - A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned} \tag{49}$$

woraus die Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung folgt.

$$\vec{x}' = A^{-1} \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{b} \tag{50}$$

Verkettungen

Verkettet man zwei affine Abbildungen $\beta \circ \alpha$ (sprich: beta nach alpha) miteinander, so führt man zuerst α und dann β aus.

$$\Rightarrow \alpha : \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{a}$$

$$\Rightarrow \beta : \vec{x}'' = B \cdot \vec{x}' + \vec{b}$$

Daraus folgt.

$$\beta \circ \alpha : \vec{x}'' = B \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{a}) + \vec{b} = B \cdot A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{a} + \vec{b} \tag{51}$$

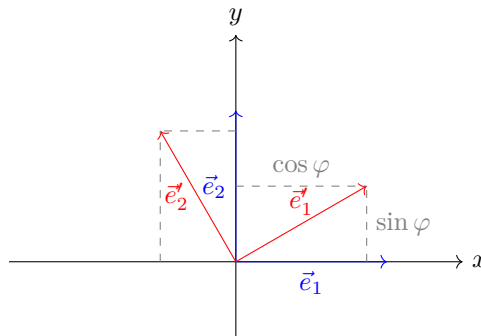
Spezielle Abbildungen

Bei den speziellen Abbildungen handelt es sich von Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften. Diese gibt es bei Rotation, Spiegelungen, Projektionen mit Parallelprojektionen (wie zum Beispiel der Schattenwurf) und Zentralprojektionen und linearen Abbildungen.

Im folgenden Kapitel liegt der Fokus auf die Grundlagen der Rotation und Spiegelung.

Rotation

Aus dem Beispiel der Rotation der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Winkel φ



folgt die Abbildungsgleichung einer Rotation in \mathbb{R}^2

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = D_\varphi \cdot \vec{x} \tag{52}$$

mit der Rotationsmatrix aus \vec{e}_1' und \vec{e}_2' .

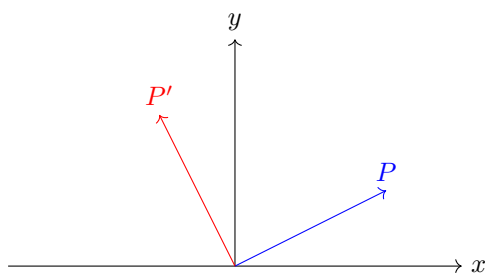
$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \tag{53}$$

Bei einer Rotation um den Winkel φ und θ werden die Rotationsmatrizen multipliziert.

$$\begin{aligned} D_\varphi \cdot D_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) & -\sin(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) & \cos(\varphi + \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{54}$$

Eine Veranschaulichung mit trivialen Winkeln

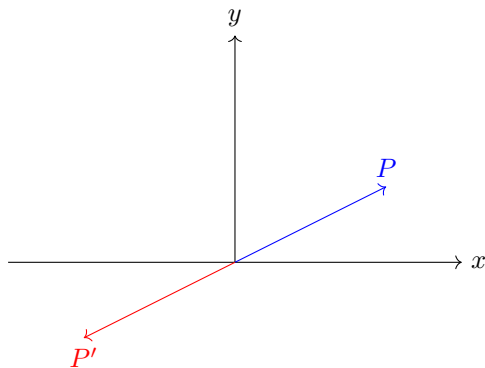
1. Fall: Drehung um den Ursprung um 90°



geg.: $P(x; y)$
ges.: $P'(x; y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D_{90}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{55}$$

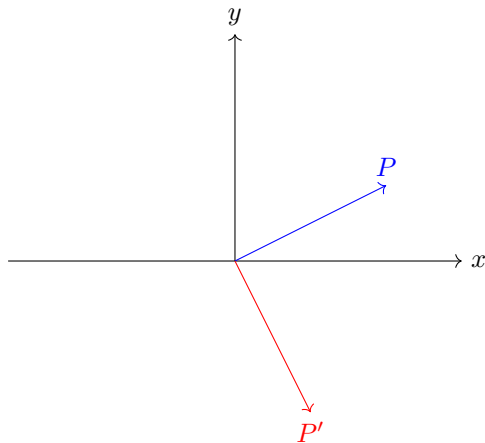
2. Fall: Drehung um den Ursprung um 180°



geg.: $P(x; y)$
ges.: $P'(x; y)$

$$\begin{aligned}
 D_{90} \cdot D_{90} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_{180} \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D_{180}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{56}$$

3. Fall: Drehung um den Ursprung um -90°



geg.: $P(x; y)$
ges.: $P'(x; y)$

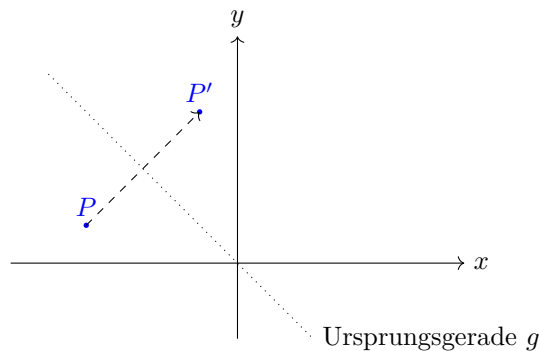
$$\begin{aligned}
 D_{-90} &= D_{90}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{D_{-90}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{57}$$

Spiegelung

Die Orthogonalspiegelung an der x -Achse kann durch die folgende Abbildungsmatrix S_x beschrieben werden.

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Hier geht es jedoch um einen Spezialfall. Anders wird bei weniger trivialen Fällen. Beispielsweise bei der Spiegelung an der Ursprungsgerade g .



Mathematisch findet bei der Spiegelung an der Ursprungsgerade folgende Schritte statt:

1. Drehen um $-\varphi$
2. Spiegeln an der x -Achse
3. Zurückdrehen

$$\Rightarrow D_\varphi \left(S_x \left(D_{-\varphi} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right)$$

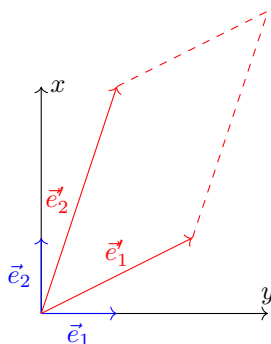
Herleitung von S_φ :

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{\cos \varphi \cos(-\varphi)}_{\cos \varphi} + \underbrace{\sin \varphi \sin(-\varphi)}_{-\sin \varphi} & -\cos \varphi \sin(-\varphi) + \sin \varphi \cos(-\varphi) \\ \cos(-\varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \sin(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \quad (59) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenvektoren

In diesem Kapitel werden die Eigenvektoren mit den wesentlichen Punkten, wie zum Beispiel Eigenwerte und charakteristisches Polynom und charakteristische Gleichung, anhand eines Beispiels erarbeitet.

Wir betrachten die Abbildung $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.



Gibt es Vektoren, deren Bild kollinear zu sich selbst ist? Ja. Diese Vektoren heissen *Eigenvektoren*.

Eigenwerte

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (60)$$

mit:

- λ heisst Eigenwert
- \vec{v} heisst Eigenvektor der Matrix A

Zwei Bemerkungen:

1. Ist \vec{v} ein Eigenvektor, dann ist auch $k\vec{v}$ ein Eigenvektor. Eine Matrix hat immer keine oder unendlich viele Eigenvektor.
2. Das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{v} &= \lambda \vec{v} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ A\vec{v} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_E \cdot \vec{v} \\ A\vec{v} - \lambda E\vec{v} &= \vec{0} \\ (A - \lambda E)\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{61}$$

Damit ein Eigenvektor existiert, muss

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{62}$$

sein.

Charakteristisches Polynom

Der Term $\det(A - \lambda E) = 0$ heisst charakteristisches Polynom der Matrix A .

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{63}$$

Daraus folgend die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Allgemeinwissen

Geschichte der linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme haben eine lange Geschichte. Schon vor 4000 Jahren haben sich Menschen mit Problemen beschäftigt, die heute mit Hilfe von solchen Gleichungssystemen gelöst werden. Mit Gleichungen können Probleme gelöst werden, welche aus den verschiedensten Bereichen kommen: aus der Mathematik selbst, aus der Technik, aus der Wirtschaft. Es gibt auch Aufgaben, die von Menschen allein zur Unterhaltung gelöst werden (Knobelaufgaben). Bei all diesen Problemen kommen Grössen vor, die zwar unbekannt sind, über die jedoch einiges Wissen vorhanden ist. Aus diesem Wissen leitet man Gleichungen her, in denen diese unbekannt Grössen vorkommen. Erhält man mehrere Gleichungen, dann spricht man von einem Gleichungssystem. Jetzt wird versucht die unbekannt Grössen rechnerisch zu bestimmen. Man löst das Gleichungssystem auf. Wenn das gelingt, ist auch das Problem gelöst. In der Mathematik unterscheidet man lineare und nichtlineare Gleichungen. Dieses Kapitel behandelt die Lösung von Systemen von linearen Gleichungen. Lineare Gleichungssysteme sind enorm wichtig und können mathematisch vergleichsweise einfach behandelt werden.

Sie beginnt vor 5000 Jahren in den warmen und wasserreichen Gegenden der Erde. An den grossen Flüssen in Mesopotamien, Ägypten, Indien und China begannen Königreiche zu entstehen. Die Menschen fingen an, das hervorzubringen, was wir Kultur nennen. Also auch die Mathematik. Die Kenntnisse, die sich im Rechnen entwickelten, wurden – wie heute – in Lehrbüchern aufbewahrt. In diesen Büchern wurde gezeigt, wie Probleme durch Rechnen gelöst werden können. Man vermittelte aber noch keine Theorie, sondern machte allein mit Beispielen klar, wie gerechnet werden muss.

Geschichte der beschreibenden Statistik

Historisch gesehen ist die beschreibende Statistik der älteste Zweig der Statistik. Schon 3000 v.Chr. wurden in Ägypten und China Volkszählungen und Vermögenserhebungen durchgeführt. Ein bekanntes Beispiel ist die zur Zeit Christi Geburt vom römischen Kaiser Augustus angeordnete Volkszählung.

Geschichte des Sinus- und Cosinussatzes

Der erste Beweis des Sinussatzes stammt von dem arabischen Mathematiker Abu Nasr (um 1000 n. Chr.), weitere Beweise vom persischen Astronomen Nasir al-Din Tusi (1201 - 1274), dessen Werk „Über die Figur der Schneidenden“ zum ersten mal die Trigonometrie als selbständige Wissenschaft darstellt.

Auch den Cosinussatz hat ein persischer Astronom, Al Biruni, erstmals (1036) ausgesprochen. In der geometrischen Form des allgemeinen pythagoräischen Satzes war er allerdings schon griechischen Mathematikern bekannt. Auf das Werk des Nasir al-Din Tusi stützte sich der deutsche Mathematiker Regiomontanus, eigentlich Johannes Müller, (1436 - 1476) aus Königsberg in Franken. Sein Buch „De triangulis omnimodis“ wurde grundlegend für die Entwicklung der Trigonometrie in Europa. Von den zahlreichen Mathematikern, die bei der Ausgestaltung der Trigonometrie mitwirkten sind besonders Francois Viète (1540 - 1603) und Leonhard Euler (1707 - 1783) zu nennen. Der erste sprach den Cosinussatz allgemein aus und stellte die Dreiecksberechnung systematisch dar, der zweite dehnte die Winkelfunktionen auf beliebige Winkel aus und gab der Trigonometrie mit Hilfe der modernen Formelsprache ihre heutige Form. Die Methode der Triangulierung (lat. angulum = Winkel), d.h. der praktischen Trigonometrie in der Landvermessung, geht auf den Leidener Professor Willebroed Snellius (1580 - 1626) zurück.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Laplace war ein bedeutender französischer Mathematiker und Physiker, der die Wahrscheinlichkeitstheorie massgeblich weiterentwickelte. Er formulierte das LAPLACE'sche Wahrscheinlichkeitsprinzip, das besagt, dass bei gleichen Voraussetzungen alle möglichen Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. In der Statistik führte er die BAYES'sche Inferenz ein und legte den Grundstein für die Analyse von Zufallsphänomenen.

Blaise Pascal (1623–1662)

Pascal war ein französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph. Das PASCAL'sche Dreieck ist eine seiner bekanntesten Arbeiten in der Stochastik. Es stellt eine systematische Anordnung der Binomialkoeffizienten dar und findet Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie in der Kombinatorik. Pascal gilt zudem als einer der Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung, die er gemeinsam mit Pierre de Fermat entwickelte.

Thomas Bayes (1701–1761)

Bayes war ein englischer Mathematiker und Theologe, der für den Satz von Bayes bekannt ist. Dieser liefert eine Methode zur Aktualisierung von Wahrscheinlichkeiten auf Basis neuer Informationen. Sein Werk ist ein Grundpfeiler der bedingten Wahrscheinlichkeit und wird in der Statistik, maschinellem Lernen und Entscheidungsfindung genutzt. Bayes veröffentlichte seine Ideen posthum, was seine Bedeutung erst später ins Bewusstsein der Wissenschaft brachte.