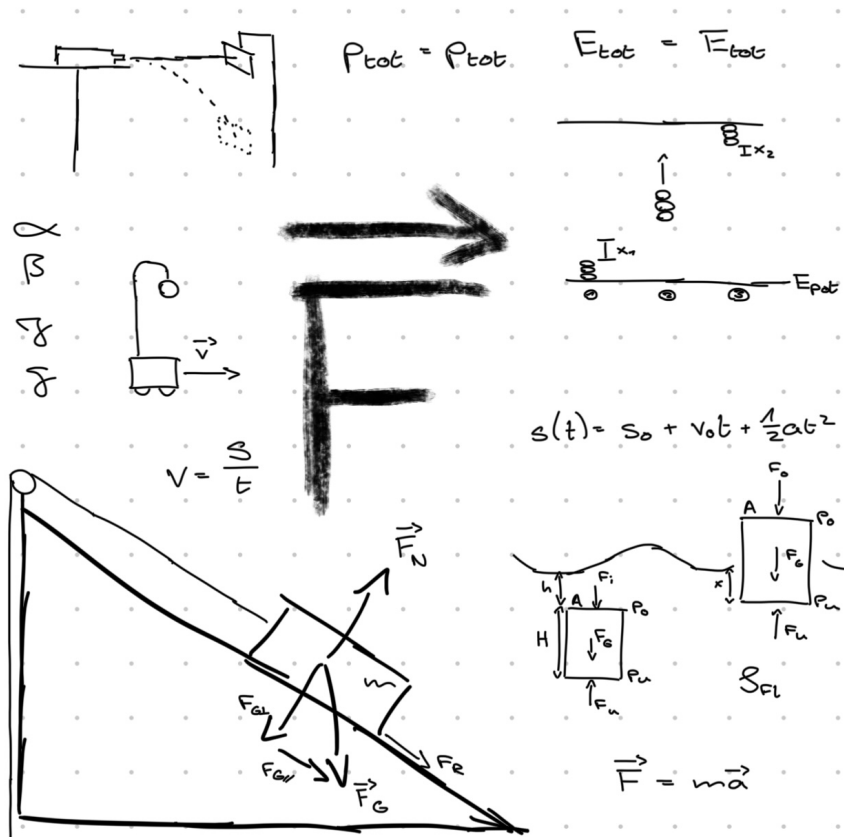


Wissenschaften fürs Gymnasium



Übersicht der Physiktheorie

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	9
0.1 Allgemein	9
0.2 Formelverzeichnis	9
0.3 Aufgabenverzeichnis	10
0.4 Definitionen	12
0.5 Informationen zum Physikunterricht	13
I Einführung	14
1 Zum Begriff Physik	14
2 Einheitssysteme	14
2.1 Zehnerpotenzen	15
2.2 Grössenordnung	16
3 Skalare und Vektoren	20
3.1 Multiplikation von Skalaren und Vektoren	20
II Mechanik	21
4 Kinematik	22
4.1 Bewegung in einer Dimension	22
4.1.1 Die Durchschnittsgeschwindigkeit	22
4.1.2 Graphische Darstellung im s-t Diagramm	24
4.1.3 Momentangeschwindigkeit	26
4.2 Bewegung in einer Dimension mit konstanter Beschleunigung	27
4.2.1 Formeln	30
4.3 Der freie Fall	31
4.4 Der vertikale Wurf	33
4.5 Bewegung in mehreren Dimensionen	34
4.6 Der horizontale Wurf	37
5 Dynamik	40
5.1 Die Masse m	40
5.2 Kräfte	40
5.2.1 Vektoraddition von Kräften	42
5.2.2 Die Newtonschen Axiome	44
5.2.3 Die Gravitationskraft \vec{F}_G	45
5.2.4 Die Dichte ρ	47
5.2.5 Die Federkraft \vec{F}_F	47
5.2.6 Die Normalkraft \vec{F}_N	48
5.2.7 Reibungskraft	50
5.3 Die Arbeit W	53
5.3.1 Die Hubarbeit W_{Hub}	55
5.3.2 Ist die Hubarbeit abhängig von der Wahl der Transportroute?	56
5.3.3 Die Beschleunigungsarbeit W_B	57
5.3.4 Die Reibungsarbeit W_R	59
5.3.5 Die Federarbeit W_F	59
5.4 Die Leistung P	60
5.4.1 Die momentane Leistung	61
5.5 Die Energie E	61
5.5.1 Die potenzielle Energie E_{pot}	62
5.5.2 Die kinetische Energie E_{kin}	63

5.5.3	Die elastische Energie oder Federenergie E_F	63
5.5.4	Der Energieerhaltungssatz	63
5.6	Der Impuls \vec{p}	67
5.6.1	Der Impuls eines Systems	67
5.6.2	Die Änderung des Impulses	68
5.6.3	Die Erhaltung des Impulses	72
5.6.4	Stösse	73
III Hydrostatik		78
6	Der Druck p	79
6.1	Stempel- & Schweredruck	80
6.1.1	Stempeldruck	81
6.1.2	Schweredruck in Flüssigkeit	81
6.1.3	Der Luftdruck	82
6.2	Der statische Auftrieb	83
IV Wärmelehre		87
7	Die Temperatur T	87
7.1	Temperaturskalen	87
7.2	Umrechnung	87
7.3	Thermische Ausdehnung	87
7.3.1	Längenausdehnung	88
7.3.2	Flächenausdehnung	89
7.3.3	Volumenänderung	90
7.3.4	Volumenausdehnung bei Gasen	91
8	Das ideale Gas	93
8.1	Das Gesetz von AMONTONS	94
8.2	Das Gesetz von GAY-LUSSAC	94
8.3	Das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE	94
8.4	Mol n , Molmasse m_{mol} & Molvolumen V_{mol}	94
9	Einfaches Teilchenmodell	98
10	Wärme und Temperaturänderung	103
10.1	Die innere Energie U	103
10.2	Die spezifische Wärmekapazität c	103
10.3	Phasenübergänge	105
10.4	Wärme­kraft­ma­schin­en	107
10.4.1	Perpetuum mobile	110
10.4.2	Zweitakt-Bezinmotor	111
10.4.3	Viertakt-Ben­zin­mo­to­r	112
10.4.4	Viertakt-Dieselmotor	114
V Optik		116
11	Geometrische Optik	118
11.1	Die Lichtgeschwindigkeit c	118
11.2	Reflexion und Brechung	119
11.2.1	Das Reflexionsgesetz	120
11.2.2	Das Brechungsgesetz von Snellius	121
11.2.3	Totalreflexion	122
11.3	Abbildung mit Linsen	123

11.3.1	Konstruktion von Linsenabbildungen, spezielle Strahlen	124
11.3.2	Die Linsengleichung	125
VI	Elektrizität und Magnetismus	126
12	Elektrostatik	127
12.1	Die elektrische Ladung Q	127
12.2	Das Gesetz von Coulomb	128
12.3	Das elektrische Feld \vec{E}	130
12.3.1	Darstellung des elektrischen Feldes mittels Feldlinien	132
12.4	Die elektrische Spannung U	134
12.4.1	Homogenes elektrisches Feld	135
12.4.2	Inhomogenes elektrisches Feld	139
12.5	Potential	140
13	Der elektrische Strom I	144
13.1	Das Ohm'sche Gesetz	145
13.2	Spezifischer Widerstand ρ_{el}	146
13.3	Elektrische Energie und Leistung	147
13.4	Parallel- und Serieschaltung von Widerständen	148
13.4.1	Parallelschaltung	148
13.4.2	Serieschaltung	149
13.5	Der Innenwiderstand R_i einer Batterie	152
14	Magnetismus	154
14.1	Permanentmagnete	154
14.2	Elektromagnetismus	155
14.3	Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in \vec{F}_M	157
14.4	Die Lorentzkraft \vec{F}_L	158
A	Anhang	161
	Allgemeinwissen	161

Abbildungsverzeichnis

4.2.1	Ort-Zeit, Geschwindigkeit-Zeit, Beschleunigungs-Zeit (Diagramme)	28
4.2.2	Ort-Zeit, Geschwindigkeit-Zeit, Beschleunigungs-Zeit (Diagramme)	28
5.3.1	Definition der Steigung	59
5.5.1	System des Energieerhaltungssatzes	64
6.1.1	Graph der eulerschen Funktion $y = e^x$	82
6.1.2	Abnahme des Luftdrucks	82
7.1.1	Celsius-Skala	87
7.1.2	Kelvin-Skala	87
9.1	Einfaches Teilchenmodell (Theorie)	98
9.2	Einfaches Teilchenmodell (Theorie)	99
9.3	Einfaches Teilchenmodell (Theorie)	99
9.4	Einfaches Teilchenmodell (Theorie)	100
10.1.1	Wärme und Temperaturänderung (Theorie)	103
10.3.1	Phasenübergänge	105
10.3.2	Wärme und Temperaturänderung (Theorie)	106
10.3.3	Energieverbrauch im Kuchendiagramm	107
10.3.4	Energieverbrauch im Liniendiagramm	107
10.4.1	Wärme und Temperaturänderung (Theorie)	108
10.4.2	Wärme und Temperaturänderung (Beispiel)	108

10.4.3	Perpetuum mobile 1. Art, nach einer Zeichnung von Jacopo de Strada, 1580 . . .	110
10.4.4	Zweitakt-Benzinmotor (Modell)	111
10.4.5	Viertakt-Benzinmotor (Modell)	113
10.4.6	Viertakt-Dieselmotor (Modell)	115
10.4.7	Sichtbare Spektrum von Licht	116
11.2.1	Geometrische Optik (Experiment)	119
11.2.2	Reflexion an einem ebenen Spiegel	120
11.2.3	Geometrische Optik (Experiment)	121
11.2.4	Einfallswinkel und Brechungswinkel	121
11.2.5	Geometrische Optik (Beispiel)	122
11.3.1	Brechung eines Lichtstrahles an den beiden Oberflächen einer Linse	123
11.3.2	Paralleles Licht schneidet sich im Brennpunkt F	124
11.3.3	Die 3 Leitstrahlen bei einer Linsenabbildung	124
11.3.4	Die 3 Leitstrahlen vor und nach der Linse	124
11.3.5	Konstruktion des Bildes mithilfe der 3 Leitstrahlen	124
11.3.6	Konstruktion einer Abbildung eines Gegenstandes G durch eine Linse mit Brennweite f	125
12.3.1	Elektrisches Feld in der homogen geladenen Vollkugel	131
12.3.2	Elektrisches Feld in der dünnen Hohlkugel	131
12.3.3	Darstellung des elektrischen Felds mittels Feldlinien	132
12.3.4	Darstellung des elektrischen Felds mittels Feldlinien	132
12.3.5	Homogenes Feld eines Plattenkondensators	132
12.4.1	$F(r)$ in Abhängigkeit von r	139
12.4.2	Einige Symbole der Elektrotechnik	140
13.1.1	I in Abhängigkeit von U	146
13.3.1	Analogie: Wasserkreislauf und elektrischer Kreislauf	147
13.4.1	Parallelschaltung	148
13.4.2	Serieschaltung	149
13.5.1	Innenwiderstand einer Batterie	152
14.1.1	Modellvorstellung durch Elementarmagnetchen	154
14.1.2	Feldlinien von Magneten	154
14.2.1	Richtung des elektrischen Stromes	155
14.3.1	Kraft / Strom / Magnetfeld in einem Hufeisenmagnet	157

Skizzenverzeichnis

4.1	Auto	22
4.2	Mikrofone	23
4.3	s-t Diagramm	25
4.4	Auto	25
4.5	v-t Diagramm	25
4.6	s-t Diagramm (Beispiel)	26
4.7	Geschwindigkeit / Beschleunigung (Beispiel)	27
4.8	Racket (Beispiel)	29
4.9	Der Freie Fall (Beispiel)	32
4.10	Bewegung in mehreren Dimensionen (Beispiel)	35
4.11	Schwimmbecken (Beispiel)	36
4.12	Der horizontale Wurf (Experiment)	37
4.13	Der horizontale Wurf (Experiment)	37
4.14	Der horizontale Wurf (Beispiel)	38
4.15	Der horizontale Wurf (Experiment)	39
5.1	Definition Vektor	40
5.2	actio = reactio	41

5.3	Auslenkung einer Feder (Beispiel)	41
5.4	Definition Federkraft	42
5.5	Graphische Darstellung von Vektoraddition (Beispiel)	43
5.6	Anziehung von Massen	45
5.7	Luftkissenbahn (Experiment)	46
5.8	Normalkraft \vec{F}_N	48
5.9	Schiefe Ebene (Beispiel)	48
5.10	Schiefe Ebene (Beispiel)	49
5.11	Schiefe Ebene (Beispiel)	50
5.12	Reibungskraft	50
5.13	Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)	51
5.14	Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)	51
5.15	Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)	51
5.16	Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)	52
5.17	Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)	53
5.18	Arbeit (Beispiel)	53
5.19	Kraft-Weg-Diagramm (mit konstanter Kraft F_{\parallel})	53
5.20	Kraft-Weg-Diagramm (mit nicht konstanter Kraft F_{\parallel})	53
5.21	Arbeit (Beispiel)	54
5.22	Hubarbeit (Beispiel)	55
5.23	Hubarbeit (Wegunabhängigkeit) (Beispiel)	56
5.24	Hubarbeit (Wegunabhängigkeit) (Beispiel)	56
5.25	Hubarbeit (Wegunabhängigkeit) (Beispiel)	56
5.26	Beschleunigungsarbeit (Beispiel)	57
5.27	Beschleunigungsarbeit (Beispiel)	57
5.28	Arbeit (Beispiel)	58
5.29	Reibungsarbeit	59
5.30	Federarbeit	59
5.31	Federarbeit (Beispiel)	60
5.32	Leistung (Beispiel)	61
5.33	Potenzielle Energie	62
5.34	Position des Nullniveaus	62
5.35	Kinetische Energie	63
5.36	Elastische Energie / Federenergie	63
5.37	Energie (Beispiel)	64
5.38	Energie (Beispiel)	65
5.39	Energie (Beispiel)	65
5.40	Energie (Beispiel)	66
5.41	Energie (Beispiel)	67
5.42	Impuls (Theorie)	67
5.43	Impuls (Theorie)	68
5.44	Impuls (Theorie)	69
5.45	Impuls (Theorie)	69
5.46	Impuls (Beispiel)	70
5.47	Impuls (Beispiel)	71
5.48	Zusammenstoss zweier Wagen - Impulserhaltungssatz	72
5.49	Der inelastische Stoss	73
5.50	Der elastische (zentrale) Stoss	74
6.1	Druck (Theorie)	79
6.2	Druck (Beispiel)	80
6.3	Druck (Theorie)	80
6.4	Stempeldruck (Theorie)	81
6.5	Schweredruck (Theorie)	81

6.6	Luftdruck (Beispiel)	83
6.7	Statischer Auftrieb (Theorie)	84
6.8	Statischer Auftrieb (Beispiel)	84
6.9	Statischer Auftrieb (Beispiel)	85
7.1	Thermische Ausdehnung (Beispiel)	88
7.2	Thermische Ausdehnung (Experiment)	88
7.3	Thermische Ausdehnung (Beispiel)	89
7.4	Thermische Ausdehnung (Theorie)	89
7.5	Thermische Ausdehnung (Theorie)	90
7.6	Thermische Ausdehnung (Theorie)	91
7.7	Thermische Ausdehnung (Experiment)	92
8.1	Das ideale Gas (Theorie)	93
8.2	Das ideale Gas (Beispiel)	93
10.1	Wärme und Temperaturänderung (Experiment)	104
10.2	Wärme und Temperaturänderung (Theorie)	109
11.1	Geometrische Optik (Aufgabe)	119
11.2	Geometrische Optik (Beispiel)	120
11.3	Geometrische Optik (Aufgabe)	121
11.4	Geometrische Optik (Aufgabe)	123
11.5	Geometrische Optik (Experiment)	125
12.1	Elektrostatik (Theorie)	127
12.2	Elektrostatik (Theorie)	127
12.3	Elektrostatik (Theorie)	128
12.4	Elektrostatik (Beispiel)	129
12.5	Elektrostatik (Beispiel)	130
12.6	Elektrostatik (Beispiel)	130
12.7	Elektrostatik (Theorie)	130
12.8	Elektrostatik (Theorie)	130
12.9	Elektrostatik (Beispiel)	131
12.10	Elektrostatik (Aufgabe)	134
12.11	Elektrostatik (Theorie)	134
12.12	Elektrostatik (Aufgabe)	135
12.13	Elektrostatik (Aufgabe)	136
12.14	Elektrostatik (Theorie)	137
12.15	Elektrostatik (Beispiel)	138
12.16	Elektrostatik (Experiment)	138
12.17	Elektrostatik (Theorie)	139
12.18	Elektrostatik (Theorie)	140
12.19	Elektrostatik (Aufgabe)	141
13.1	Elektrostatik (Beispiel)	144
13.2	Elektrostatik (Beispiel)	144
13.3	Elektrostatik (Experiment)	145
13.4	Elektrostatik (Experiment)	145
13.5	Elektrostatik (Theorie)	146
13.6	Elektrostatik (Beispiel)	149
13.7	Elektrostatik (Aufgabe)	150
13.8	Elektrostatik (Aufgabe)	151
14.1	Magnetismus (Aufgabe)	156
14.2	Magnetismus (Beispiel)	158
14.3	Magnetismus (Beispiel)	159
14.4	Magnetismus (Aufgabe)	160
14.5	Magnetismus (Aufgabe)	160

Tabellenverzeichnis

2.1	Wichtige physikalische Grössen und ihre SI-Einheiten	15
2.1.1	Zehnerpotenzen	16
2.2.1	Eine Übersicht über typische Strecken	17
2.2.2	Grössenordnung verschiedener Massen, welche uns bekannt sind.	17
2.2.3	Grössenordnung unterschiedlicher Zeitintervalle	18
2.2.4	Das griechische Alphabet	19
4.1.1	Freier Fall einer Kugel	26
4.1.2	Übersicht: Zeit, Strecke und Durchschnittsgeschwindigkeit (Beispiel)	26
4.2.1	Freier Fall eines Steins	29
5.2.1	Auslenkung einer Feder (Beispiel)	41
12.3.1	Analogien zwischen Gravitation und Elektrizität	132
13.1.1	Messwerte der Stromstärke in Abhängigkeit der Spannung	145

Quellenverzeichnis

Durandi, Werner (2022). *Formeln, Tabellen, Begriffe*. DMK, DPK, DCK.

Grentz, Wolfgang (2021). *Physik - anwenden und verstehen*. DPK.

Joos, Dr. Franco (2023). *Unterrichtsnotizen*. Notizen aus dem Physikunterricht. Zeitraum: 2023 - 2026.

mathematik.ch (2024). [Online; geöffnet am 03. Mai 2024]. URL: <https://www.mathematik.ch>.

Vorwort

0.1 Allgemein

Übersicht der Physiktheorie mit Stoffumfang 4G bis 6G (Grentz 2021; Durandi 2022; Joos 2023).

Stand: Kapitel „Magnetismus“ (14), 13.03.2026

0.2 Formelverzeichnis

Kapitel **Definitionen:**

- Umschlag (Ende) | Allgemeine Konstante
- S.86ff | Dreiecke
- S.89ff | Vierecke
- S.93ff | Dreidimensionale Objekte

Kapitel **Kinematik:**

- S.155 | Geradlinige Bewegung eines Punkts
- S.156 | Bewegung in mehreren Dimensionen

Kapitel **Dynamik:**

- S.157 | Dichte
- S.157 | Impuls
- S.157 | 2. / 3. NEWTON'sche Axiome
- S.157 | Reibungs-, Gewicht- und Federkraft
- S.158 | Arbeit / Energie
- S.158 | Hubarbeit / potenzielle Energie
- S.158 | Beschleunigungsarbeit / kinetische Energie
- S.158 | Federarbeit / elastische Energie / Federenergie
- S.158 | mittlere Leistung
- S.158 | momentane Leistung
- S.159 | un/elastischer Stoss
- S.159 | Deformationsenergie
- S.161 | Gravitationskraft

Kapitel **Der Druck p :**

- S.164 | Druck
- S.164 | Schweredruck
- S.164 | Barometrische Höhenformel
- S.164 | (Statischer) Auftrieb

Kapitel **Die Temperatur T :**

- S.170 | Längenausdehnung
- S.170 | Volumenausdehnung (flüssige Stoffe)

Kapitel **Das ideale Gas:**

- S.171 | Ideale Gasgleichung

Kapitel **Einfaches Teilchenmodell:**

- S.171 | E_{kin} eines Teilchens
- S.171 | v eines Teilchens

Kapitel **Wärme und Temperaturänderung:**

- S.158 | Wirkungsgrad
- S.170 | Erster Hauptsatz der Wärmelehre
- S.170 | Spezifische Wärmekapazität c
- S.170 | Spezifische Schmelzwärme L_f
- S.170 | Spezifische Verdampfungswärme L_v
- S.172 | Wirkungsgrad (CARNOT)

Kapitel **Geometrische Optik:**

- S.166 | Wellenlänge
- S.166 | Ausbreitungsgeschwindigkeit
- S.167 | Brechungsgesetz
- S.167 | Linsenformel
- S.182 | E eines Photons

Kapitel **Elektrostatik:**

- S.173 | Coulomb-Gesetz
- S.173 | Elektrische Feldstärke
- S.175 | Elektrisches Feld im Plattenkondensator
- S.174 | Spannung
- S.174 | Potential
- S.174 | Potential einer Punktladung
- S.174 | E_{pot} eines Teilchens

Kapitel **Der elektrische Strom I:**

- S.175 | Stromstärke
- S.175 | Widerstand
- S.175 | Spez. Widerstand
- S.176 | Parallelschaltung
- S.176 | Serieschaltung
- S.176 | Klemmspannung

Kapitel **Magnetismus:**

- S.177 | Magnetfeld (Leiter)
- S.177 | Kraft \vec{F}_M
- S.177 | Lorentzkraft
- S.178 | Magnetfeld (Kreis)
- S.178 | Magnetfeld (Spule)

Kapitel **Astronomie:**

- S.209f | Erde und Erdsatelliten
- S.211 | Sonne
- S.212 | Sonnensystem

Kapitel **Chemie:**

- S.218 | Variablen und Konstanten
- S.218 | Stoffmenge n

Übersicht:

- S.186 | Verschiedene Druckeinheiten
- S.187 | Übersicht von Dichte
- S.188 | Ausbreitungsgeschwindigkeit
- S.189 | Reibungskoeffizienten
- S.190f | Ausdehnungskoeffizient
- S.190f | Spezifische Wärmekapazität
- S.193 | Brechungsindizes
- S.194 | Spez. Widerstand
- S.195 | Dielektrizitätszahl ϵ_r
- S.195 | Ladungsträgerdichte n_e

0.3 AufgabenverzeichnisKapitel **Kinematik:**

- Kapitel „Bewegung in einer Dimension“ (4.1)
Buch (Grentz 2021): S.17ff; 2, 3, 5, 8
- Kapitel „Bewegung in einer Dimension mit konstanter Beschleunigung“ (4.2)
Buch (Grentz 2021): S.19ff; 9, 10, 11, 13, 21, 23, 26, 27, 28, 31, 32
- Kapitel „Der freie Fall“ (4.3)
Buch (Grentz 2021): S.28f; 46, 50a, 51
- Kapitel „Der vertikale Wurf“ (4.4)
Buch (Grentz 2021): S.30; 56, 57

- Kapitel „Der horizontale Wurf“ (4.6)
Buch (Grentz 2021): S.33f; 67, 68, 69, 70, 73

Kapitel Dynamik:

- Kapitel „Kräfte“ (5.2)
Buch (Grentz 2021): S.38ff; 83, 84, 93, 94, 95, 99, 100, 101, 109, 110, 111, 112, 114 | S.62ff; 178, 179, 180, 181, 183, 185, 186, 188, 189
- Kapitel „Die Arbeit W “ (5.3)
Buch (Grentz 2021): S.72ff; 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 224
- Kapitel „Die Leistung P “ (5.4)
Buch (Grentz 2021): S.74ff; 225, 226, 227, 228, 229, 233, 234, 235
- Kapitel „Die Energie E “ (5.5)
Buch (Grentz 2021): S.79f; 245, 246, 251, 252
- Kapitel „Der Impuls \vec{p} “ (5.6)
Buch (Grentz 2021): S.85ff; 268, 269, 270, 271, 272, 278, 280, 282, 283, 286

Kapitel Der Druck p :

- Kapitel „Der Druck p “ (6)
Buch (Grentz 2021): S.114f; 366, 368, 369
- Kapitel „Stempel- & Schweredruck“ (6.1)
Buch (Grentz 2021): S.115ff; 370, 371, 372, 374, 375, 376, 377, 378, 379 | S.120f; 390, 391, 392
- Kapitel „Der statische Auftrieb“ (6.2)
Buch (Grentz 2021): S.122ff; 398, 400, 408, 410, 413

Kapitel Die Temperatur T :

- Kapitel „Thermische Ausdehnung“ (7.3)
Buch (Grentz 2021): S.165ff; 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 22

Kapitel Das ideale Gas:

- Kapitel „Das Gesetz von AMONTONS“ (8.1)
Buch (Grentz 2021): S.173; 30, 31
- Kapitel „Das Gesetz von GAY-LUSSAC“ (8.2)
Buch (Grentz 2021): S.173f; 32, 33, 34, 35
- Kapitel „Das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE“ (8.3)
Buch (Grentz 2021): S.117f; 380, 382
- Kapitel „Mol n , Molmasse m_{mol} & Molvolumen V_{mol} “ (8.4)
Buch (Grentz 2021): S.163f; 2, 3

Kapitel Wärme und Temperaturänderung:

- Kapitel „Die spezifische Wärmekapazität c “ (10.2)
Buch (Grentz 2021): S.181ff; 61, 62, 63, 72
- Kapitel „Phasenübergänge“ (10.3)
Buch (Grentz 2021): S.186; 81, 82, 83
- Kapitel „Wärmekraftmaschinen“ (10.4)
Buch (Grentz 2021): S.187ff; 85, 87, 90, 99, 100

Kapitel Geometrische Optik:

- Kapitel „Reflexion und Brechung“ (11.2)
Buch (Grentz 2021): S.199f; 1, 6, 7 | S.204ff; 22, 26, 27, 30, 34, 38
- Kapitel „Abbildung mit Linsen“ (11.3)
Buch (Grentz 2021): S.210f; 45, 48

Kapitel Elektrostatik:

- Kapitel „Das Gesetz von Coulomb“ (12.2)
Buch (Grentz 2021): S.223ff; 9, 10, 14ab, 15, 17
- Kapitel „Das elektrische Feld \vec{E} “ (12.3)
Buch (Grentz 2021): S.221ff; 4, 5, 6, 25, 26
- Kapitel „Die elektrische Spannung U “ (12.4)
Buch (Grentz 2021): S.228; 18
- Kapitel „Potential“ (12.5)
Buch (Grentz 2021): S.226; 20, 21

Kapitel Der elektrische Strom I:

- Kapitel „Das Ohm'sche Gesetz“ (13.1)
Buch (Grentz 2021): S.238; 55
- Kapitel „Spezifischer Widerstand ρ_{el} “ (13.2)
Buch (Grentz 2021): S.248; 93, 94
- Kapitel „Elektrische Energie und Leistung“ (13.3)
Buch (Grentz 2021): S.238ff; 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63
- Kapitel „Parallel- und Serieschaltung von Widerständen“ (13.4)
Buch (Grentz 2021): S.240ff; 65, 66, 69, 70, 71, 73
- Kapitel „Der Innenwiderstand R_i einer Batterie“ (13.5)
Buch (Grentz 2021): S.245f; 83, 84, 89

Kapitel Magnetismus:

- Kapitel „Elektromagnetismus“ (14.2)
Buch (Grentz 2021): S.254ff; 109, 110, 111, 113
- Kapitel „Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in \vec{F}_M “ (14.3)
Buch (Grentz 2021): 114, 120, 121
- Kapitel „Die Lorentzkraft \vec{F}_L “ (14.4)
Buch (Grentz 2021): 126, 127, 128

0.4 Definitionen

- Volumen-Umrechnung

$$1l = 0.001m^3 = 10^{-3}m^3 = 1dm^3$$
$$1dl = 0.0001m^3 = 10^{-4}m^3$$

- Kontinuität

– stetig: Eine Funktion ist stetig, wenn man (bspw.) mit einem Stift durchgehen kann.

- unstetig: Eine Funktion ist unstetig, wenn man (bspw.) den Stift anheben muss, gibt es in der Natur nicht.
- Ausdruck
 - explizit: klar, deutlich
 - implizit: versteckt
- Eine Schokoladentafel...
 - ... halten $\hat{=} 1N$
 - ... über einen $1m$ -Tisch heben $\hat{=} 1J$
 - ... über einen $1m$ -Tisch in einer Sekunde heben $\hat{=} 1W$
- Varia
 - Relativbewegung: Ohne Bezugspunkt schauen
 - Vektoren haben Pfeile (z.B. \vec{F}_G), deren Komponente nicht (z.B. $F_{G\parallel}$)
 - Lotrecht = vertikal
 - Normal = senkrecht
 - Allgemein = immer
 - Beweis \neq Beispiel
 - Strahlungstemperatur $> / \neq$ Lufttemperatur

0.5 Informationen zum Physikunterricht

Instruktionen bei Prüfungen:

- Endresultate immer doppelt unterstreichen
- Aufgaben klar nummerieren
- Eine Aufgabe nicht zweimal lösen (wenn doch eine Version durchstreichen)
- Ränder frei lassen
- Zusatzblätter A4 kariert
- mit Lineal zeichnen (bspw. Skizzen, Koordinatensystem)
- nie mit gerundeten Werten rechnen (im Taschenrechner)

Vorgehensweise, um Aufgaben zu lösen:

- Skizze zeichnen
- Formel suchen
- Aufgabe lösen
- Lösungssatz schreiben

I Einführung

1 Zum Begriff Physik

Der Begriff *Physik* stammt aus dem Griechischen und meint *das Natürliche*. Die Physik ist die Wissenschaft von den Vorgängen in der unbelebten Natur. Die Physik umfasst sowohl die Beschreibung vielfältiger Naturerscheinungen als auch die Formulierung von Gesetzmässigkeiten, durch welche die Erscheinungen vorhersehbar und quantifizierbar werden.

Die Physik entstand aus der Philosophie. Philosophie bedeutet die *Liebe zur Weisheit*. Die Physik spaltete sich von der klassischen Philosophie ab und wurde als eigenständige Naturwissenschaft die Mutter aller Naturwissenschaften, denn auf ihr gründen alle anderen Naturwissenschaften (Astronomie, Biologie, Chemie, Geologie, etc.).

In der Physik unterscheidet man verschiedene Unterbereiche wie z.B. *Mechanik*, *Wärmelehre* (*Kalorik*, *Thermodynamik*), *Elektrizität* und *Magnetismus*, *die Lehre der Fluide* (Gase, Flüssigkeiten), *Optik*, *Atomphysik*, *Quantenphysik*, *Astrophysik*, ...

Wir werden hier nicht alle Themen behandeln können, sondern müssen eine Auswahl treffen. Das bei weitem wichtigste Thema ist die *Mechanik*, denn viele andere Bereiche bauen auf der Mechanik auf. Deshalb werden wir uns das ganze erste Jahr mit der Mechanik beschäftigen.

2 Einheitssysteme

In der Physik geht es unter anderem um Einheiten, d.h. man muss eine Grösse in einer bestimmten Einheit darstellen, z.B. eine Länge in Metern, ein Volumen in Litern eine Masse in Tonnen, ein Zeitintervall in Wochen, etc. Deshalb muss man sich zuerst darauf einigen, welche Einheiten man gebrauchen will, denn es gibt viel zur Auswahl, z.B. kann man eine Länge darstellen in Metern, Fuss, Zoll, Ellen, Lichtjahren, ... In der Physik an der Kantonsschule Graubünden einigen wir uns auf das sogenannte *SI* (Système Internationale). Man nennt dieses System oft auch *mks*-System, weil diesem System der Meter (*m*), das Kilogramm (*kg*) und die Sekunde (*s*) zu Grunde liegen. Weitere Einheiten des SI sind für die Temperatur das Kelvin (*K*), für die Stromstärke das Ampère (*A*), für die Stoffmenge das Mol (*mol*) und für die Lichtstärke die Candela (*cd*). Es gibt viele daraus abgeleitete Einheiten, welche erst nach und nach eingeführt werden. Wenn nichts anderes steht, müssen alle Angaben *immer* in SI-Einheiten gemacht werden.

Im folgenden begegnen wir der Definition des Meters, der Sekunde und des Kilogramms:

Definition: Ein Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in $\frac{1}{299'792'458}$ Sekunden zurücklegt.

Definition: Eine Sekunde ist die Zeit während welcher das Licht 9'192'631'770 Schwingungen vollführt, und zwar beim Übergang zwischen den zwei Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Cäsium-133.

Definition: Ein Kilogramm wird durch die beiden andere SI-Einheiten *Meter* und *Sekunde* definiert und zwar über das sogenannte *PLANCK'sche Wirkungsquantum*

$$h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$$

Beispiel: Ein Auto fährt mit 120km/h auf der Autobahn. Gib diese Geschwindigkeit in SI-Einheiten an!

$$1 \text{km} = 1000 \text{m} \quad 1 \text{h} = 3600 \text{s} \quad \Rightarrow \quad 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \frac{1000 \text{m}}{3600 \text{s}} = \frac{120 \cdot 1000 \text{m}}{3600 \text{s}} = 33 \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.1)$$

In der folgenden Tabelle sind einige weitere physikalische Grössen mit ihren SI-Einheiten dargestellt:

Grösse	Grössensymbol	Name der SI-Einheit	Einheitssymbol
Länge	s	Meter	m
Zeit	t	Sekunde	s
Masse	m	Kilogramm	kg
Frequenz	f	Hertz	Hz
Kraft	F	Newton	N
Druck	p	Pascal	Pa
Energie	E	Joule	J
Leistung	P	Watt	W
Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampère	A
elektr. Ladung	Q	Coulomb	C
elektr. Spannung	U	Volt	V
elektr. Widerstand	R	Ohm	Ω
elektr. Kapazität	C	Farad	F
magn. Induktion (Magnetfeld)	B	Tesla	T
Lichtstärke	I	Candela	cd
Energiedosis	D	Gray	Gy
Aktivität	A	Becquerel	Bq
Stoffmenge	n	Mol	mol

Tabelle 2.1: Wichtige physikalische Grössen und ihre SI-Einheiten

Wandle folgende Grössen in SI-Einheiten um:

1. Strecken

- a) $650cm$
 $6.5m$
- b) $0.085km$
 $85m$
- c) $98.05dm$
 $9.805m$
- d) $0.05mm$
 $0.00005m$
- e) $33.98km$
 $333'980m$
- f) $5000\mu m$
 $0.005m$
- g) $0.000005ly^a$
 $47'302'500'000m$

2. Zeiten

- a) $4h$
 $14'400s$
- b) $2h 44min$
 $9840s$
- c) $0.4h$
 $1440s$
- d) $1d$
 $86'400s$
- e) $4'000'000\mu s$
 $4s$
- f) $1W 3d 2h 5min$
 $871'500s$
- g) $1a$
 $31'536'000s$

3. Massen

- a) $40g$
 $0.04kg$
- b) $40kg 450g$
 $40.45kg$
- c) $4t 400g$
 $4000.4kg$
- d) $35\mu g$
 $0.000'000'035kg$

^a $1ly = 9.4605 \cdot 10^{15}m$, ein Lichtjahr

2.1 Zehnerpotenzen

In der Physik hat man oft mit sehr grossen aber auch sehr kleine Zahlen zu tun. Damit man nicht viele Nullen zu schreiben braucht, verwendet man eine gekürzte Form: die Zehnerpotenzen. **In der Physik soll man so oft wie möglich grosse bzw. kleine Zahlen als Zehnerpotenzen schreiben!**

Beispiel: $5'600'000 \rightarrow 5.6 \cdot 10^6$ oder $0.00000000083 \rightarrow 8.3 \cdot 10^{-10}$

Vielfaches	Vorsilbe	Abkürzung	ausgeschrieben
10^{15}	Peta	P	1'000'000'000'000'000
10^{12}	Tera	T	1'000'000'000'000
10^9	Giga	G	1'000'000'000
10^6	Mega	M	1'000'000
10^3	Kilo	k	1'000
10^2	Hekto	h	100
10^1	Deka	da	10
10^{-1}	Dezi	d	0.1
10^{-2}	Centi	c	0.01
10^{-3}	Milli	m	0.001
10^{-6}	Mikro	μ	0.000'001
10^{-9}	Nano	n	0.000'000'001
10^{-12}	Piko	p	0.000'000'000'001
10^{-15}	Femto	f	0.000'000'000'000'001

Tabelle 2.1.1: Zehnerpotenzen

Gib die physikalische Grösse in SI-Einheiten an und verwende immer 10-er Potenzen:

- | | |
|---|---|
| 1. $0.3g$
$3 \cdot 10^{-4}kg$ | 8. 1 Million Mikrokilogramm
$1 \cdot 10^0kg$ |
| 2. $1020km$
$1.02 \cdot 10^6m$ | 9. 20 Megatonnen
$2 \cdot 10^{10}kg$ |
| 3. $1h$
$3.6 \cdot 10^3s$ | 10. Ein halber Tag
$4.32 \cdot 10^4s$ |
| 4. $469.23\mu g$
$4.6923 \cdot 10^{-7}kg$ | 11. 2 Wochen
$1.2096 \cdot 10^6s$ |
| 5. $0.000'000'034dm$
$3.4 \cdot 10^{-9}m$ | 12. 30 Kilostunden
$1.08 \cdot 10^8s$ |
| 6. $425'900'000'000'000'000m$
$4.259 \cdot 10^{17}m$ | 13. 460 Megafranken
$4.6 \cdot 10^8Fr.$ |
| 7. $3'400'000'000h$
$1.224 \cdot 10^{13}s$ | 14. $10^{-15}ly$
$9.4605 \cdot 10^0m$ |

2.2 Grössenordnung

In den folgenden Tabellen werden einige Grössenordnungen für Strecken (s), Massen (m) und Zeiten (t) angegeben. Diese Tabellen sollen ein Gefühl vermitteln, mit welcher Grössenordnung die Physik zu tun hat. Die Werte sind nicht als genaue Werte zu interpretieren, sondern vermitteln bloss „etwa-Grössen“.

Strecke	m
Protonenradius	10^{-15}
Atomradius	10^{-10}
Radius eines Virus	10^{-7}
Radius einer Walnuss	10^{-2}
Körpergrösse eines Menschen	10^0
Höhe der grössten Berge der Erde	10^4
Erdradius	10^7
Sonnenradius	10^9
Abstand zwischen Sonne und Erde	10^{11}
Abstand zum nächsten Stern	10^{16}
Radius des sichtbaren Universums	10^{26}

Tabelle 2.2.1: Eine Übersicht über typische Strecken

Masse	kg
Elektron	10^{-30}
Proton	10^{-27}
Hämoglobin	10^{-22}
Grippenvirus	10^{-19}
Regentropfen	10^{-6}
Tafel Schokolade	10^{-1}
Flasche Wein	10^0
Mensch	10^2
Pyramide	10^{10}
Erde	10^{24}
Sonne	10^{30}
Universum	10^{53}

Tabelle 2.2.2: Grössenordnung verschiedener Massen, welche uns bekannt sind.

Zeitintervall	s
Planckzeit (benötigt Quantengravitation vorher)	10^{-43}
Licht durchquert einen Atomkern	10^{-23}
Schwingungsperiode von sichtbarem Licht	10^{-15}
Schwingungsperiode der höchsten hörbaren Töne	10^{-4}
Herzperiode beim Menschen	10^0
Dauer einer Erdrotation (Tag)	10^5
Dauer einer Umrundung der Erde um die Sonne	10^7
Lebensdauer eines Menschen	10^9
Halbwertszeit von Plutonium-239 (^{239}P)	10^{12}
Alter der Erde	10^{17}
Alter des Universums	10^{18}

Tabelle 2.2.3: Grössenordnung unterschiedlicher Zeitintervalle

Da in der Physik oft vom griechischen Alphabet gebrauch gemacht wird, sei es folgend dargestellt:

Grossbuchstabe	Kleinbuchstabe	Name	Bedeutung
A	α	Alpha	a
B	β	Beta	b
Γ	γ	Gamma	g
Δ	δ	Delta	d
E	ϵ	Epsilon	e (zu)
Z	ζ	Zeta	z
H	η	Eta	e (offen)
Θ	θ	Theta	th
I	ι	Iota	i
K	κ	Kappa	k
Λ	λ	Lambda	l
M	μ	Mü	m
N	ν	Nü	n
Ξ	ξ	Xi	x
O	\omicron	Omikron	o (kurz)
Π	π	Pi	p
P	ρ	Rho	r
Σ	σ	Sigma	s
T	τ	Tau	t
Y	υ	Ypsilon	y
Φ	ϕ	Phi	ph (f)
X	χ	Chi	ch
Ψ	ψ	Psi	ps
Ω	ω	Omega	o (lang)

Tabelle 2.2.4: Das griechische Alphabet

3 Skalare und Vektoren

Wir lernen zwei Arten von Grössen kennen: Skalare und Vektoren.

Ein *Skalar* ist eine Grösse, die nichts anderes braucht als eine Zahl, um verstanden zu werden, z.B. die Masse eines Apfels sei 0.13kg . Die Masse ist also ein Skalar.

Ein *Vektor* ist eine Grösse, die zusätzlich zur Zahl noch eine Richtung benötigt, um verstanden zu werden. Die Aussage, „ich fahre mit einer Geschwindigkeit von 80km/h “ reicht noch nicht aus. Ich muss auch sagen in welche Richtung ich fahre, z.B. „nach Norden“. Die Geschwindigkeit ist also ein Vektor. Vektoren werden zur besseren Kennzeichnung mit einem Pfeil über dem Symbol versehen, z.B. für die Geschwindigkeit: \vec{v} .

Wir werden Vektoren noch eingehender im Laufe des Schuljahrs studieren.

3.1 Multiplikation von Skalaren und Vektoren

1. Skalar \cdot Skalar = Skalar
2. Skalar \cdot Vektor = Vektor
3. Vektor \cdot Vektor = Skalar (Skalarprodukt)
4. Vektor \times Vektor = Vektor (Vektorprodukt), z.B. im Elektromagnetismus

II Mechanik

Die Mechanik ist der grundlegende Teil der Physik. Sie wird unterteilt in **Kinematik** und **Dynamik**. Die Kinematik behandelt die Bewegung von Körpern in einem Koordinatensystem. Die Dynamik untersucht den Einfluss von Kräften auf die Bewegung.

4 Kinematik

Hier beschreiben wir, wie sich ein Körper bewegt.

4.1 Bewegung in einer Dimension

Hier kann sich ein Körper (z.B.: ein Zug) nur vorwärts oder rückwärts bewegen (hier also auf der Schiene).

4.1.1 Die Durchschnittsgeschwindigkeit

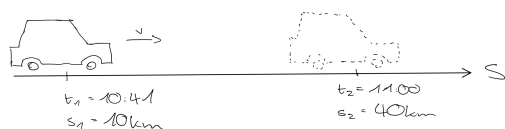
Auch genannt als die „mittlere Geschwindigkeit“. Das Symbol für Geschwindigkeit ist v .

Definition: Die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} ist die in einer Zeit Δt zurückgelegte Strecke Δs geteilt durch Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4.1.1)$$

Bemerkung: Das Symbol Δ (Delta) steht für „Differenz“.

Es gilt $\Delta s = s_2 - s_1$ bzw. $\Delta t = t_2 - t_1$.



Skizze 4.1: Auto

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 40 \text{ km} - 10 \text{ km} = 30 \text{ km}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 11 : 00 - 10 : 41 = 19 \text{ min}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30 \text{ km}}{19 \text{ min}} \\ &= \frac{30'000 \text{ m}}{19 \cdot 60 \text{ s}} = 26.32 \text{ m/s} \\ &\approx \underline{\underline{95 \text{ km/h}}} \end{aligned}$$

Beispiele:

- Ein Auto fährt morgens um 8:00 in Chur los und erreicht das 392 km entfernte Genf um 12:00 mittags. Wie gross war seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{392 \text{ km}}{4 \text{ h}} = \frac{392'000 \text{ m}}{4 \cdot 3600 \text{ s}} = \underline{\underline{27.22 \text{ m/s}}} \quad (4.1.2)$$

- Eine Luftseilbahn startet um 09:35 an der Talstation und erreicht die Bergstation um 10:02. Die Strecke misst 2.3 km.

- Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2.3 \text{ km}}{27 \text{ min}} = \frac{2300 \text{ m}}{27 \cdot 60 \text{ s}} = \underline{\underline{1.42 \text{ m/s}}} \quad (4.1.3)$$

- Wann würde die Luftseilbahn ankommen, wenn sie eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 2 m/s hat?

$$\text{Aus } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{\bar{v}} = \frac{2300 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 1150 \text{ s} \hat{=} \underline{\underline{19 \text{ min } 10 \text{ s}}} \quad (4.1.4)$$

Ankunft um 09:54:10.

3. Ein Velofahrer startet eine flache 10 km lange Strecke um 16:23. Er fährt 8 Minuten lang und hält nach 2km an. Dort macht er eine Pause von 20 Minuten. Dann fährt er weiter und kommt um 17:45 am Ziel an. Berechne...

- a) ... die Durchschnittsgeschwindigkeit für die totale Strecke.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10km}{82min} = \frac{10'000m}{82 \cdot 60s} = \underline{\underline{2.03m/s}} \quad (4.1.5)$$

- b) ... die Durchschnittsgeschwindigkeit für die beiden Teilstrecken.

$$\bar{v}_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{2km}{8min} = \frac{2000m}{8 \cdot 60s} = \underline{\underline{4.17m/s}} \quad (4.1.6)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{8km}{54min} = \frac{8000m}{54 \cdot 60s} = \underline{\underline{2.47m/s}} \quad (4.1.7)$$

- c) Wann würde er ankommen, wenn er durchgehend mit der höheren Geschwindigkeit fahren würde?

$$\text{Aus } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{\bar{v}} = 2400s \hat{=} \underline{\underline{40min}} \quad (4.1.8)$$

Ankunft um 17:03.

- d) Was kannst du über seine Geschwindigkeit aussagen?

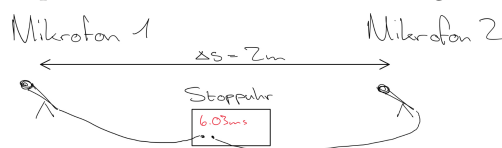
-

Man gibt den Ort s zur Zeit t als $s(t)$ an. Der Ort s ist eine Funktion der Zeit t . Man kann die Durchschnittsgeschwindigkeit v deshalb folgendermassen schreiben:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (4.1.9)$$

Somit ist die Variable nur noch die Zeit. Es ist ein Hauptziel der Kinematik $s(t)$ für beliebige Zeiten t zu kennen bzw. zu bestimmen. In Zukunft werden wir meistens auf das „quer“ bei der Durchschnittsgeschwindigkeit verzichten.

Experiment: Wir messen die Schallgeschwindigkeit in Luft:



$$v_{\text{Schall}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2m}{6.03 \cdot 10^{-3}s} \approx \underline{\underline{332m/s}} \quad (4.1.10)$$

Skizze 4.2: Mikrofone

Aufgaben:

1. Bestimme die Geschwindigkeit des Mondes um die Erde (mittlere Abstand Erde-Mond: $3.844 \cdot 10^8m$).

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot 3.844 \cdot 10^8m}{29d \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = \underline{\underline{998m/s}} \quad (4.1.11)$$

2. Wie lange benötigt das Licht vom Mond zur Erde? (Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8m/s$).

$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{3.844 \cdot 10^8m}{3 \cdot 10^8m/s} = \underline{\underline{1.28s}} \quad (4.1.12)$$

3. Wie lange benötigt das Licht von der Sonne zu Erde? (Mittlere Entfernung der Erde zur Sonne: $1AE = 1.496 \cdot 10^{11}m$. Diese Entfernung nennt man eine *Astronomische Einheit*.)

$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1.496 \cdot 10^{11}m}{3 \cdot 10^8 m/s} = \underline{\underline{498.67s}} \quad (4.1.13)$$

4. Eine Schnecke ist zur Zeit $t_1 = 2s$ bei $s_1 = 18mm$ und befindet sich zur Zeit $t_2 = 7s$ bei $s_2 = 14mm$. Berechne die Verschiebung und die mittlere Geschwindigkeit.
Verschiebung:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 0.014m - 0.018m = \underline{\underline{-0.004m}} \quad (4.1.14)$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{0.014m - 0.018m}{7s - 2s} = \underline{\underline{-0.0008m/s}} \quad (4.1.15)$$

5. Susi fährt mit ihrem Velo um 7:00 bei A los in Richtung B. Ihre Geschwindigkeit ist $v_S = 3m/s$. B ist $8km$ weit entfernt. Nach 2 Minuten starten Rolf bei B ihr entgegen mit einer Geschwindigkeit $v_R = 2m/s$. Wann treffen sich die beiden? (Lösung: 07:27:28)

—

6. Ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Wie weit ist das?

$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v\Delta t = (3 \cdot 10^8 m/s) \cdot (365d \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = \underline{\underline{9.46 \cdot 10^{15}m}} \quad (4.1.16)$$

7. Ein 110m langer Zug fährt über eine 180m lange Brücke. Seine Geschwindigkeit beträgt $120km/h$. Wie lange ist mindestens ein Teil des Zuges auf der Brücke?

$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{110m + 180m}{120km/h : 3.6} = \underline{\underline{8.7s}} \quad (4.1.17)$$

8. Ein Autofahrer hat eine $360km$ lange Strecke zurücklegen. Welche Zeit spart er ein, wenn er nicht mit seiner üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit $v_1 = 80km/h$ sondern mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $v_2 = 90km/h$ fährt? Wie gross ist die Zeiteinsparung in Prozenten?
Mit v_1 :

$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{360'000m}{80km/h : 3.6} = \underline{\underline{16'200s}} \quad (4.1.18)$$

Mit v_2 :

$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{360'000m}{90km/h : 3.6} = \underline{\underline{14'400s}} \quad (4.1.19)$$

Unterschied:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 16'200s - 14'400s = \underline{\underline{1800s}} \quad (4.1.20)$$

Mithilfe Dreisatz: 11.11%

9. Ein Auto fährt von A nach B. Ein Viertel der Strecke wird mit der Geschwindigkeit v , der Rest mit $\frac{v}{2}$ zurückgelegt. Welche ist die mittlere Geschwindigkeit des Autos über die ganze Strecke?

—

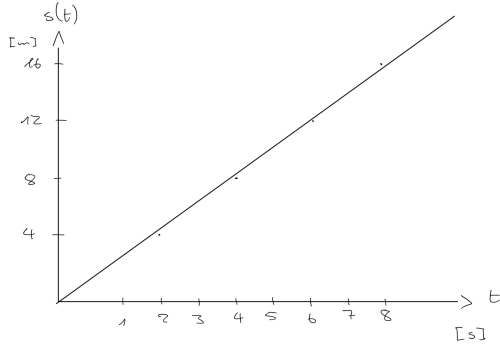
4.1.2 Graphische Darstellung im s-t Diagramm

Auch genannt als „Ort-Zeit-Diagramm“. Die Bewegung eines Körpers der Geschwindigkeit v kann in einem zweidimensionalen Koordinatensystem (kartesisches Koordinatensystem) dargestellt werden. Die Abszisse (x-Achse) stellt die Zeit t dar und die Ordinate (y-Achse) stellt den Ort $s(t)$ dar.

Exkurs - Was ist eine Funktion?

Die Funktion ist eine Zuordnung von Zahlen. Die x-Achse „existiert“ und die y-Achse sagt, wie hoch die Steigung ist.

Für jede Zeit t kann somit der zugehörige Ort $s(t)$ ermittelt und graphisch festgehalten werden. Als Beispiel nehmen wir die Luftseilbahn, welche mit $2m/s$ unterwegs war.



$$\text{Aus } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v \cdot \Delta t \quad (4.1.21)$$

Skizze 4.3: s-t Diagramm

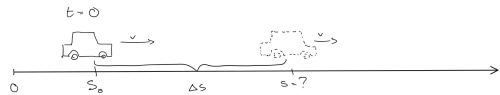
Da die Geschwindigkeit konstant ist, ist der Graph im s-t Diagramm eine Gerade.

Satz: Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung im s-t Diagramm.

Beweis: Definition der Steigung in einem x-y Koordinatensystem: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. In „unserem“ Diagramm (s-t Diagramm) entspricht $\Delta y \Rightarrow \Delta s$ und $\Delta x \Rightarrow \Delta t$. Dann wird $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ q.e.d.

Hinweis: Je steiler die Kurve im s-t Diagramm, desto grösser die Geschwindigkeit.

Wir betrachten ein Auto, das mit konstanter Geschwindigkeit $v = 20m/s$ am Ort $s_0 = 46m$ zur Zeit $t_1 = 0s$ vorbeifährt. Wo befindet sich das Auto zur Zeit $t_2 = 2s$?



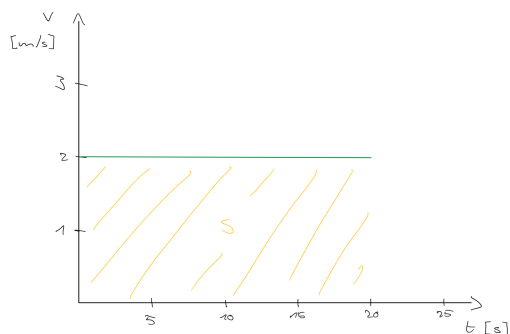
Skizze 4.4: Auto

Gesucht ist der Ort des Autos zur Zeit $t = 2s$. In $2s$ hat es die Strasse $\Delta s = v \cdot \Delta t = 20m/s \cdot 2s = 40m$ zurückgelegt. Da es zur Zeit $t = 0s$ bereits bei $s_0 = 46m$ war, ist es jetzt am Ort $s = 46m + 40m = 86m$.

Allgemein gilt für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit:

$$s(t) = s_0 + vt \quad (4.1.22)$$

Wobei s_0 den Anfangsort (zur Zeit $t = 0s$) beschreibt.

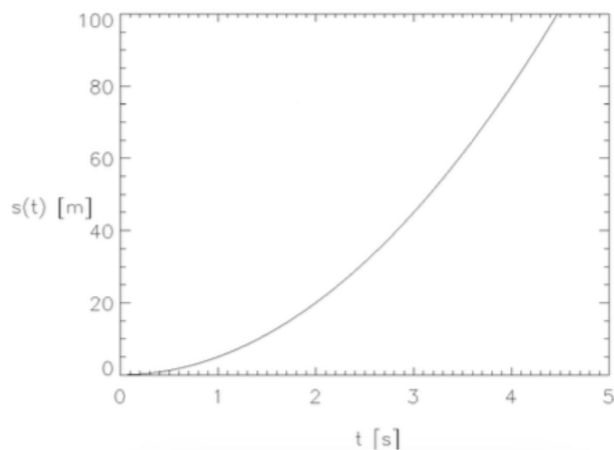


Skizze 4.5: v-t Diagramm

Anstelle einer Darstellung einer Bewegung im s-t Diagramm kann man diese auch im v-t Diagramm darstellen. Als Beispiel nehmen wir wieder die Luftseilbahn, welche mit der Geschwindigkeit $v = 2m/s$ unterwegs ist:

Bei konstanter Geschwindigkeit ist die Kurve im v-t Diagramm eine Horizontale. Die Fläche unter der Kurve im v-t Diagramm entspricht der zurückgelegten Strecke.

4.1.3 Momentangeschwindigkeit



Skizze 4.6: s-t Diagramm (Beispiel)

Wir betrachten eine Kugel, welche von einer 100m hohen Brücke fallen gelassen wird. Sie prallt nach 4.47s in den Fluss. Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist also $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100m}{4.47s} = 22.37m/s$. Die Kugel ist aber nicht mit einer konstanten Geschwindigkeit gefallen, sondern wurde immer schneller. In einem Experiment wurde der Ort der Kugel abhängig von der Zeit bestimmt.

Zeit [s]	0	0.1	0.2	0.5	1	2	4	4.47
Ort [m]	0	0.05	0.2	1.25	5	20	80	100

Tabelle 4.1.1: Freier Fall einer Kugel

Wir erinnern uns an die Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{4.1.23}$$

Wir möchten nun die Momentangeschwindigkeit der Kugel zur Zeit 0.1s bestimmen. Dazu fixieren wir t_1 bei 0.1s und nähern t_2 von 4.47s schrittweise bis $t_2 = 0.2s$ an t_1 an. Für diese Paare von t_1 und t_2 bestimmen wir nun die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit.

t_1 [s]	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
t_2 [s]	4.47	4	2	1	0.5	0.2
s_1 [m]	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
s_2 [m]	100	80	20	5	1.25	0.2
Δt	4.37	3.9	1.9	0.9	0.4	0.1
Δs	99.95	79.95	19.95	4.95	1.2	0.15
v [m/s]	mit \bar{v} -Formel ausrechnen					

Tabelle 4.1.2: Übersicht: Zeit, Strecke und Durchschnittsgeschwindigkeit (Beispiel)

Wir sehen, dass sich die Durchschnittsgeschwindigkeit ändert. Würde man die Zeitabschnitte weiter verkleinern, so würden wir einem fixen Wert der Geschwindigkeit beliebig nahe kommen. Diesen Wert nennt man die *Momentangeschwindigkeit*. In unserem Beispiel haben wir uns dem Zeitpunkt $t_1 = 0.1s$ angenähert, also wäre es die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt (Moment) $t = 0.1s$.

Da $t_2 = t_1 + \Delta t$ ist, kann man obige Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} \tag{4.1.24}$$

Wenn man nun das Δt immer kleiner werden lässt, also wenn Δt gegen Null geht, erhält man die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t_1 .

Definition: Die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t ist definiert folgendermassen:

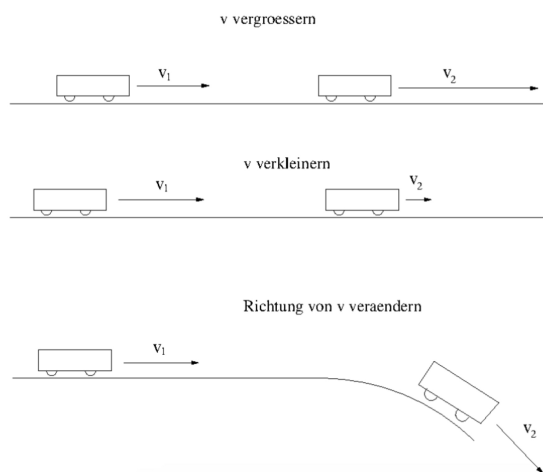
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (4.1.25)$$

4.2 Bewegung in einer Dimension mit konstanter Beschleunigung

Wenn die Steigung im s - t Diagramm nicht konstant ist, bedeutet, dass die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Man spricht dann von einer **Beschleunigung**. Im Alltag bedeutet Beschleunigung eine Erhöhung der Geschwindigkeit. In der Physik bedeutet Beschleunigung eine **Veränderung** der Geschwindigkeit.

Definition: Beschleunigung heisst eine Veränderung der Geschwindigkeit.

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, und ein Vektor durch einen Betrag und eine Richtung charakterisiert wird, bedeutet *Veränderung* der Geschwindigkeit:



Skizze 4.7: Geschwindigkeit / Beschleunigung (Beispiel)

Definition: Der Betrag der Beschleunigung ist die Veränderung der Geschwindigkeit geteilt durch die dafür benötigte Zeit.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (4.2.1)$$

Die Einheit der Beschleunigung ist somit „ a “ (acceleration \rightarrow Beschleunigung). Die SI-Einheit der Beschleunigung ist somit „ m/s^2 “ (Meter pro Quadratsekunde).

$$[a] = \left[\frac{v}{t} \right] = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2} \quad (4.2.2)$$

Wir behandeln hier nur Probleme mit *konstanter* Beschleunigung $a = konstant$. Das bedeutet, die Beschleunigung hat immer die gleiche Richtung und immer den gleichen Betrag (a ist ein Vektor). Ein Ziel ist es, den Ort $s(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Objektes zu jeder beliebigen Zeit t zu bestimmen:

1. Ist die Beschleunigung $a = 0, \dots$
 - a) so bleibt die Geschwindigkeit konstant $\Rightarrow v(t) = v$
 - b) und der Ort ist $s(t) = s_0 + vt$
 - c) Diagramme für ein Beispiel mit $a = 0, v = 2m/s$ und $s_0 = 4m$:

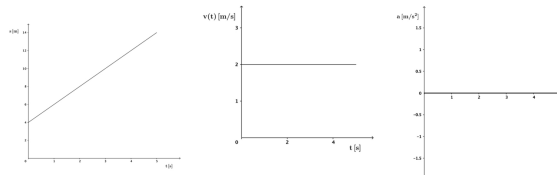


Abbildung 4.2.1: Ort-Zeit, Geschwindigkeit-Zeit, Beschleunigungs-Zeit (Diagramme)

2. \dots ist die Beschleunigung $a = \textit{konstant} \neq 0$ und die Anfangsgeschwindigkeit v_0
 - a) so verändert sich die Geschwindigkeit mit der Zeit: $v(t) = v_0 + at$
 - b) und der Ort ist: $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
 - c) Diagramme für ein Beispiel mit der Beschleunigung $a = 3m/s^2, v_0 = 4m/s,$ und $s_0 = 5m$

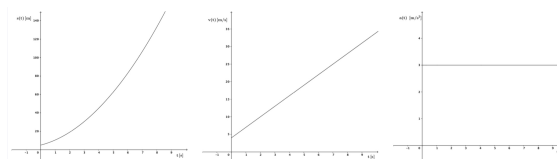


Abbildung 4.2.2: Ort-Zeit, Geschwindigkeit-Zeit, Beschleunigungs-Zeit (Diagramme)

Beispiele:

1. $a = 2m/s^2$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit jede Sekunde um $2m/s$ zunimmt.
2. $a = -4m/s^2$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit pro Sekunde um $4m/s$ abnimmt.
3. Ein Auto braucht $4s$ von 0 auf $100km/h$. Dann ist die Beschleunigung:

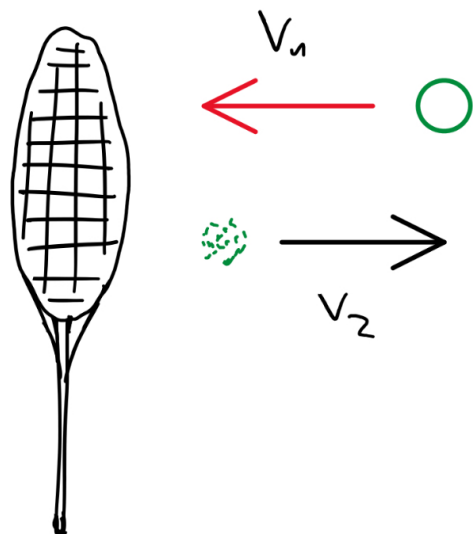
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\frac{100}{3.6}m/s - 0}{4s} = \underline{\underline{6.94m/s^2}} \quad (4.2.3)$$

4. Ein Auto bremst in $7s$ von $100km/h$ auf $40km/h$ ab.

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \dots = \underline{\underline{2.38m/s^2}} \quad (4.2.4)$$

5. Wir berechnen die Beschleunigung auf einen Tennisball, welcher mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 30m/s$ auf das Racket herangebraust und dieses mit $v_2 = 20m/s$ verlässt. Die Kontaktzeit sei eine Hundertstel Sekunde.

$$v_1 = 30\text{m/s}; v_2 = 20\text{m/s}$$



$$a = \frac{\frac{20\text{m}}{1\text{s}} - \left(-\frac{30\text{m}}{1\text{s}}\right)}{0.01\text{s}} = \underline{\underline{5000\text{m/s}^2}} \quad (4.2.5)$$

Negativ, weil v_1 nach links gerichtet ist. Siehe auch Abbildung ??.

Skizze 4.8: Racket (Beispiel)

Aufgabe: Beim Stein, der von der Brücke fällt wird in verschiedenen Zeitabständen die Momentangeschwindigkeit gemessen und in folgende Tabelle eingetragen:

t [s]	v [m/s]	a [m/s ²]
0	0	
0.1	0.98	
0.3	2.94	
1	9.8	
1.5	14.7	
2	19.6	
4	39.2	

Tabelle 4.2.1: Freier Fall eines Steins

Wir berechnen die Beschleunigung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Zeitabständen. Was fällt auf?

Die Beschleunigung ist jedesmal 9.81m/s^2 und ist somit konstant.

Die gefundene Beschleunigung von 9.8m/s^2 nennt man die **Erdbeschleunigung**. Die Erde beschleunigt jede Masse mit etwa diesen 9.8m/s^2 nach unten. Der Betrag der Erdbeschleunigung nimmt jedoch mit der Höhe über Meer ab. Auf Meereshöhe bei 45° nördlicher Breite beträgt er 9.8061m/s^2 und auf dem Weissfluhjoch 9.80004m/s^2 .

Wir rechnen immer mit dem Wert 9.81m/s^2 . Für die Erdbeschleunigung (auch Fallbeschleunigung) verwendet man ein spezielles Symbol:

$$g = 9.81\text{m/s}^2$$

Beispiel: Lässt man eine Masse an der Erdoberfläche fallen, so kann man seine Geschwindigkeit nach der Zeit Δt folgendermassen bestimmen:

$$\text{Aus } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t \quad (4.2.6)$$

Somit ist die Geschwindigkeit eines fallenden Objektes: $v(t) = g \cdot t$ z.B. nach $2s$: $v = 9.81m/s^2 \cdot 2 = \underline{\underline{19.62m/s}}$

Satz: Beschleunigt ein Körper gleichmässig von v_0 (Anfangsgeschwindigkeit) auf v (Endgeschwindigkeit), dann ist die mittlere Geschwindigkeit während des Beschleunigungsvorganges:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{4.2.7}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{s - s_0}{\Delta t} \\ &= \frac{s - s_0}{t} \\ &= \frac{s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - s_0}{t} \\ &= \frac{v_0 t + \frac{1}{2}at^2}{t} \\ &= v_0 + \frac{1}{2}at \\ &= \frac{2v_0 + at}{2} \\ &= \frac{v_0 + v + at}{2} \\ &= \frac{v_0 + v}{2} \quad q.e.d. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

4.2.1 Formeln

Die folgenden Formeln gelten für die gleichmässig beschleunigte Bewegung (also immer im Grundlagenfach Physik). Sie heissen **kinematische (Funktions)gleichungen**:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{4.2.9}$$

$$v(t) = v_0 + at \tag{4.2.10}$$

Nota Bene

$s(t)$ bedeutet „Strecke zu einer Zeit“ und $v(t)$ bedeutet „Geschwindigkeit zu einer Zeit“
 $v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \Delta s$ und $at = \Delta v$

Lösen wir die zweite Gleichung nach t auf und setzen sie in die erste Gleichung ein, so erhalten wir...

$$\begin{aligned} v(t) = v_0 + at &\Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 &= s_0 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \\ s(t) = s_0 - \frac{v_0^2}{2a} + \frac{v^2}{2a} \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

... die **zeitfreie Gleichung**:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \tag{4.2.12}$$

Beispiel: Eine Mirage fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 100\text{m/s}$ von Graubünden ins Tessin. 2km hinter der Kantonsgrenze zündet der Pilot den Nachbrenner und beschleunigt während 4s mit $a = 40\text{m/s}^2$.

- a) Wie weit ist er nach diesen 4s von der Kantonsgrenze entfernt?

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 2000\text{m} + 100\text{m/s} \cdot 4\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 40\text{m/s}^2 \cdot (4\text{s})^2 \\ &= \underline{\underline{2720\text{m}}} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

- b) Mit welcher Geschwindigkeit ist die Mirage dann unterwegs?

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a t \\ &= 100\text{m/s} + 40\text{m/s}^2 \cdot 4\text{s} \\ &= \underline{\underline{260\text{m/s}}} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

- c) Wie lange müsste der Jet beschleunigen bis er Schallgeschwindigkeit erreicht? und wo wäre er dann?

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a t \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ &= \frac{340\text{m/s} - 100\text{m/s}}{40\text{m/s}^2} \\ &= \underline{\underline{6\text{s}}} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 2000\text{m} + 100\text{m/s} \cdot 6\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 40\text{m/s}^2 \cdot (6\text{s})^2 \\ &= \underline{\underline{3320\text{m}}} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

- d) Welche Beschleunigung müsste der Nachbrenner liefern, wenn der Flieger 2.4km hinter der Grenze eine Geschwindigkeit von 180 m/s haben soll?

$$\begin{aligned} \text{Aus } v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta s \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} \\ &= \frac{(180\text{m/s})^2 - (100\text{m/s})^2}{2 \cdot (2400\text{m} - 2000\text{m})} = \underline{\underline{28\text{m/s}^2}} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

4.3 Der freie Fall

Was heisst frei fallen? Galileo Galilei: „Wenn man den Einfluss der Luft vernachlässigt, dann fallen alle Körper mit der gleichen Beschleunigung nach unten.“

Diese Beschleunigung ist die Fallbeschleunigung g .

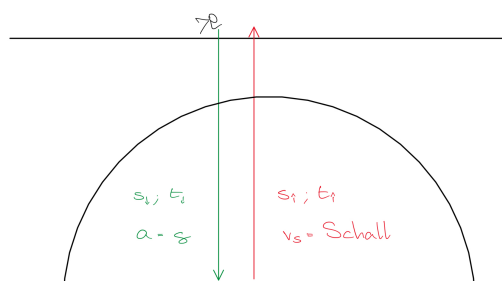
Beispiel: Wir lassen je einen Stein von zwei verschiedenen Brücken fallen. Bei der ersten schlägt der Stein nach 4.3s unten auf. Bei der zweiten hört man den Aufschlag nach 4.3s . Wie hoch sind die beiden Brücken?

1. Brücke:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot (4.3\text{s})^2 = \underline{\underline{90.69\text{m}}} \quad (4.3.1)$$

2. Brücke: In der Zeit $t = 4.3s$ fällt der Stein und beschleunigt während t_{\downarrow} und legt die Strecke s_{\downarrow} zurück, und der Schall steigt während t_{\uparrow} unbeschleunigt und legt die Strecke s_{\uparrow} zurück.

Es gilt $s_{\downarrow} = s_{\uparrow}$ und $t = t_{\downarrow} + t_{\uparrow}$.



Skizze 4.9: Der Freie Fall (Beispiel)

$$s_{\downarrow} = s_{\uparrow}$$

$$\frac{1}{2}gt_{\downarrow}^2 = v_s t_{\uparrow}$$

$$\text{Aus } t = t_{\downarrow} + t_{\uparrow} \Rightarrow t_{\uparrow} = t - t_{\downarrow}$$

$$\frac{1}{2}gt_{\downarrow}^2 = v_s t_{\downarrow}$$

$$= v_s(t - t_{\downarrow})$$

$$= v_s t - v_s t_{\downarrow}$$

$$0 = \frac{1}{2}gt_{\downarrow}^2 + v_s t_{\downarrow} - v_s t$$

$$t_{\downarrow,1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v_s^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}g \cdot v_s t}}{2 \cdot \frac{1}{2}g}$$

$$= \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot 340 \cdot 4.3}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9.81}$$

$$= \frac{-340 \pm 379.85}{9.81}$$

$$v_{S/Schall} = 340m/s$$

$$g = 9.81m/s^2$$

$$t = 4.3s$$

$$t_{\downarrow,1} = 4.06s$$

$$t_{\downarrow,2} = -73.38s$$

(4.3.2)

Somit ist die Höhe $s = \frac{1}{2}gt_1^2 = \underline{\underline{80.93m}}$

Aufgaben:

1. Ein Stein wird aus der Höhe h fallen gelassen. Es dauert $3s$ bis der Stein den Boden erreicht. Wie gross ist h ?

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$= \underline{\underline{44.15m}}$$

(4.3.3)

2. Ein Stein der Masse $m = 2kg$ wird aus einer Höhe $h = 4m$ fallen gelassen. Wie lange dauert es bis der Stein am Boden ankommt?

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$\sqrt{\frac{s}{\frac{1}{2}a}} = t$$

$$= \underline{\underline{0.9s}}$$

(4.3.4)

3. Eine Masse m wird aus der Höhe $10m$ fallen gelassen. Welche Geschwindigkeit hat die Masse kurz vor dem Ausprall?

$$\begin{aligned}v^2 &= v_0^2 + 2a(s_2 - s_1) \\v &= \sqrt{2a\Delta s} \\ &= \underline{\underline{14.01m/s}}\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

4. Eine Masse wird nun auf dem Planeten Mars aus der Höhe $h = 10m$ fallen gelassen. Wie lange dauert es, bis die Masse den Marsboden trifft?

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2}at^2 \\ \sqrt{\frac{t}{\frac{1}{2}a}} &= t \\ &= \underline{\underline{2.32s}}\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

5. Ein Stein fällt aus der Höhe h auf den Boden und braucht dafür die Zeit t . Nun wird die Höhe verdoppelt. Wie lange dauert der Fall nun?

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2}at^2 \\ t &= \sqrt{\frac{s}{\frac{1}{2}a}} = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ t' &= \sqrt{\frac{2 \cdot 2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{1} \cdot \frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{1}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2} \underbrace{\sqrt{\frac{2h}{g}}}_t \\ &= \underline{\underline{\sqrt{2}t}}\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

6. Ein Stein fällt aus der Höhe h auf den Boden und erreicht dabei eine maximale Geschwindigkeit v . Nun wird die Höhe halbiert. Welche maximale Geschwindigkeit erreicht der Stein nun?

$$\begin{aligned}v^2 &= v_0^2 + 2a(s_2 - s_1) \\ &= 2gh \\ v &= \sqrt{2gh} \\ v' &= \sqrt{2g\frac{h}{2}} = \sqrt{2gh\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \underbrace{\sqrt{2gh}}_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v \\ &= \underline{\underline{\frac{v}{\sqrt{2}}}}\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

4.4 Der vertikale Wurf

Vom vertikalen Wurf spricht man, wenn man ein Objekt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ nach oben oder unten wirft. Ab jetzt muss man auf die Vorzeichen (oben / unten) besonders acht geben:

oben = positiv

unten = negativ

Beispiel: Ein Schuss aus einem Gewehr wird senkrecht nach oben abgegeben. Die Mündungsgeschwindigkeit beträgt 900m/s .

a) Wie hoch kommt der Schuss maximal?

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta s \\
 &= v_0^2 + 2(-g)h \\
 &= v_0^2 - 2gh \\
 2gh &= v_0^2 - v^2 \\
 h &= \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \\
 &= \frac{v_0^2}{2g} \\
 &= \frac{(900\text{m/s})^2}{2 \cdot 9.81\text{m/s}^2} \\
 &= \underline{\underline{41'284.4\text{m}}}
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

b) Wo ist der Schuss nach 10s?

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \\
 &= 0 + 900\text{m/s} \cdot 10\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-9.81\text{m/s}^2) \cdot (10\text{s})^2 \\
 &= \underline{\underline{8509.5\text{m}}}
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

c) Wo ist der Schuss nach 180s?

$$\begin{aligned}
 &= 0 + 900\text{m/s} \cdot 180\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-9.81\text{m/s}^2) \cdot (180\text{s})^2 \\
 &= \underline{\underline{3078\text{m}}}
 \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

d) Wann erreicht der Schuss eine Höhe von $10'000\text{m}$?

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \\
 10'000\text{m} &= 900\text{m/s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9.81\text{m/s}^2) \cdot t^2 \\
 0 &= -\frac{1}{2} \cdot (-9.81) \cdot t^2 - 900 \cdot t + 10'000 \\
 t_{1,2} &= \frac{900 \pm \sqrt{900^2 - 4 \cdot 4.905 \cdot 10'000}}{2 \cdot 4.905} \\
 &= \frac{900 \pm 30\sqrt{682}}{9.81}
 \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

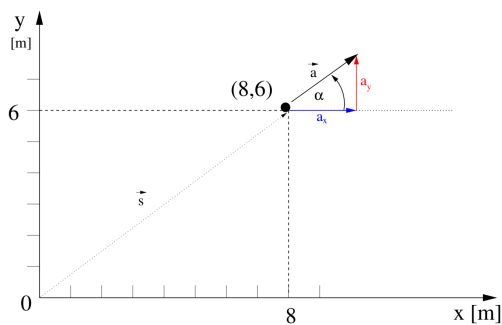
$$t_1 = \underline{\underline{11.9\text{s}}}$$

$$t_2 = \underline{\underline{171.61\text{s}}}$$

4.5 Bewegung in mehreren Dimensionen

Bewegt sich ein Körper in der Ebene (also zweidimensional), so kann Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers zu jeder Zeit als Funktion der Zeit angegeben werden. Zwei Dimensionen kann man z.B. in der x-y-Ebene darstellen.

Beispiel: Ein Auto befindet sich auf einem grossen, rechteckigen Parkplatz. Seinen Ort stellt man als (Orts)vektor \vec{s} mit zwei Komponenten dar. In unserem Beispiel gilt dann $\vec{s} = \begin{pmatrix} 8m \\ 6m \end{pmatrix}$, d.h. das Auto ist bei $x = 8m$ und $y = 6m$.
Nun beschleunigt das Auto mit $a = 2m/s^2$? Es hat dabei einen Winkel von $\alpha = 40^\circ$ zur x-Achse. Wo befindet es sich nach $7s$?



Skizze 4.10: Bewegung in mehreren Dimensionen (Beispiel)

Dazu zerlegen wir die Bewegung in ihre Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\alpha) \\ a \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2m/s^2 \cdot \cos(40^\circ) \\ 2m/s^2 \cdot \sin(40^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.53m/s^2 \\ 1.29m/s^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Nun haben wir das Problem in seine Komponenten zerlegt und können wie gewohnt verfahren:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 8m + \frac{1}{2}a \cdot \cos(40^\circ) \cdot (7s)^2 \quad (4.5.2) \\ &= 45.54m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ &= 6m + \frac{1}{2}a \cdot \sin(40^\circ) \cdot (7s)^2 \quad (4.5.3) \\ &= 37.5m \end{aligned}$$

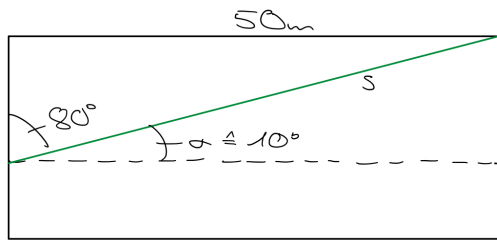
Das Auto befindet sich nach $7s$ am Ort $\vec{s} = \begin{pmatrix} 45.54m \\ 37.5m \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Winkel in der Ebene werden im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt. (Achtung! Taschenrechner muss auf Grad eingestellt sein und nicht auf Rad!)
Ab sofort werden Vektoren mit einem Pfeil über ihrem Symbol versehen!

Die **Komponenten** der Vektoren haben keine Pfeile. Spricht man über den Betrag eines Vektors, so lässt man den Pfeil auch weg, oder man zeichnet explizit die Betragsstriche.

Beispiel: Ein Schwimmer möchte das 50m Becken durchschwimmen. Er springt aber unter einem Winkel von 80° relativ zum Start-Beckenrand ins Wasser.

- a) Wie gross ist die zurückgelegte Strecke bis zum Ziel-Beckenrand?



Skizze 4.11: Schwimmbecken (Beispiel)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{A}{H} \Rightarrow H = \frac{A}{\cos(\alpha)} \\ &= \frac{50m}{\cos(10^\circ)} \\ &= \underline{\underline{50.77m}} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

- b) Wie lange hat dies gedauert? (Wenn der Schwimmer schön senkrecht zum Start-Beckenrand schwimmt, braucht er für eine Länge 34s).

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} = \underline{\underline{1.47m/s}} \\ t &= \frac{s}{v} = \underline{\underline{34.52s}} \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Aufgaben: Schreibe die folgenden Vektoren als Komponentenvektoren:

- a) $v = 12m/s$ mit einem Winkel von 30° zur x-Achse.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 12m/s \cdot \cos(30^\circ) \\ 12m/s \cdot \sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.39m/s \\ 6m/s \end{pmatrix}$$

- b) $a = 8m/s^2$ mit einem Winkel von -20° zur x-Achse.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8m/s^2 \cdot \cos(-20^\circ) \\ 8m/s^2 \cdot \sin(-20^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.52m/s^2 \\ -2.74m/s^2 \end{pmatrix}$$

- c) $v = 4m/s$ mit einem Winkel von 33° zur y-Achse.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4m/s \cdot \cos(123^\circ) \\ 4m/s \cdot \sin(123^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.18m/s \\ 3.35m/s \end{pmatrix}$$

- d) $a = 3m/s^2$ mit einem Winkel von -20° zur y-Achse.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3m/s^2 \cdot \cos(70^\circ) \\ 3m/s^2 \cdot \sin(70^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.03m/s^2 \\ 2.82m/s^2 \end{pmatrix}$$

- e) $v = 6m/s$ mit einem Winkel von 0° zur y-Achse.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6m/s \cdot \cos(90^\circ) \\ 6m/s \cdot \sin(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0m/s \\ 6m/s \end{pmatrix}$$

Satz: Über die Entkopplung der Bewegungen: Die Bewegungen in mehreren Dimensionen dürfen komponentenweise betrachtet werden.

In der folgenden Zusammenstellung beschreiben wir die kinematischen Gleichungen komponentenweise:

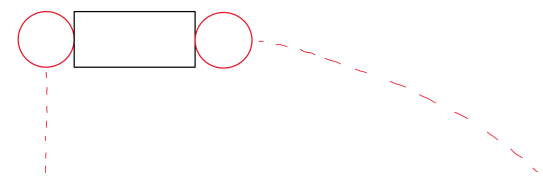
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{pmatrix} \quad (4.5.6)$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,0} + a_x t \\ v_{y,0} + a_y t \end{pmatrix} \quad (4.5.7)$$

4.6 Der horizontale Wurf

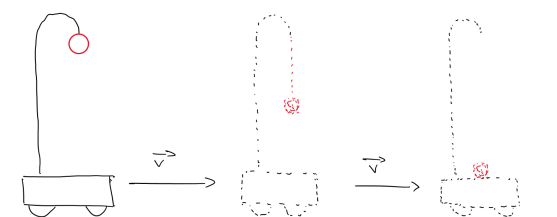
Vom horizontalen Wurf spricht man, wenn man ein Objekt mit einer waagrechten Anfangsgeschwindigkeit horizontal zur Erdoberfläche abwirft bzw. abschießt. D.h. $v_{x,0} \neq 0$ und $v_{y,0} = 0$.

Experiment: Beide Kugeln erreichen gleichzeitig den Boden. Die linke fällt frei, die rechte vollführt einen waagrechten Wurf \Rightarrow **Entkopplung der Bewegung**.



Skizze 4.12: Der horizontale Wurf (Experiment)

Experiment: Von einem fahrendem Waagen wird eine Kugel fallen gelassen. Sie landet im Waagen \Rightarrow **Entkopplung der Bewegung**.



Skizze 4.13: Der horizontale Wurf (Experiment)

Aufgabe: Aus einer geborstenen Wasserleitung in der Höhe $h = 1.2\text{m}$ fließt Wasser horizontal mit einer Geschwindigkeit von 20km/h aus der Wand. Bestimme den Ort x , wo das Wasser den Boden trifft und den Geschwindigkeitsvektor als Komponentenvektor des Wassers an diesem Ort. Bestimme auch den Geschwindigkeitsbetrag und den Winkel unter welchen das Wasser relativ den Boden trifft.

Wenn das Wasser aus der Wand tritt, beginnt es sofort frei zu fallen, bewegt sich aber gleichzeitig mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v_{x,0}$ in x-Richtung.

Freier Fall aus der Höhe h :

$$\text{Aus } s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} t^2$$

folgt für die y-Richtung

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= 0.49 \text{ s} \hat{=} \text{Flugzeit}$$

(4.6.1)

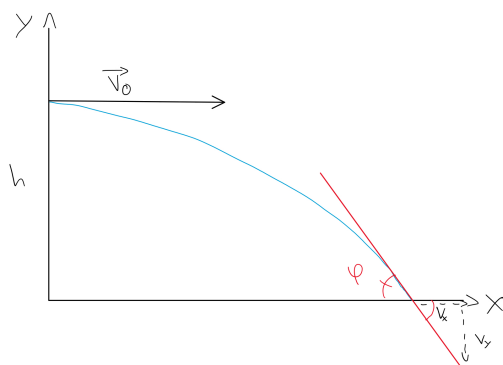
So lange hat das Wasser Zeit, sich in x-Richtung zu bewegen:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ &= 0 + \frac{20}{5.6} t + 0 \\ &= \underline{2.75 \text{ m}} \hat{=} \text{Ort } x \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) + a_x t \\ v_y(t) + a_y t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{20}{3.6} \text{ m/s} + 0 \\ 0 - g t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5.56 \text{ m/s} \\ -4.85 \text{ m/s} \end{pmatrix} \\ &\hat{=} \text{Geschwindigkeitsvektor} \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

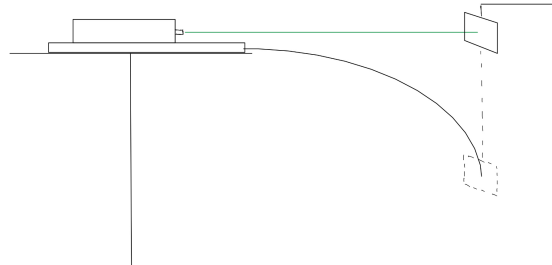
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \underline{7.38 \text{ m/s}} \\ &\hat{=} \text{Geschwindigkeitsbetrag} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{-4.85 \text{ m/s}}{5.56 \text{ m/s}}\right) \\ &= \underline{-41.13^\circ} \\ &\hat{=} \text{Winkel} \end{aligned} \quad (4.6.4)$$



Skizze 4.14: Der horizontale Wurf (Beispiel)

Experiment: Abschuss eines fallenden Objektes: Eine Blasrohrkanone wird mit dem Ziellager horizontal auf eine hängende Stahlplatte ausgerichtet. Sobald das Geschoss die Mündung verlässt, fällt die Stahlplatte. Diese wird im Flug getroffen!



Skizze 4.15: Der horizontale Wurf (Experiment)

5 Dynamik

Hier beschreiben wir, warum sich ein Körper bewegt.

5.1 Die Masse m

Die Masse eines Körpers gibt darüber Auskunft, wie viel Material in diesem Körper steckt. Die Masse ist ein Skalar.

Die SI-Einheit der Masse ist das Kilogramm: $[m] = kg$

Im Volksmund verwendet man Masse und Gewicht oft synonym. In der Physik ist das falsch!

Die Masse ist grundsätzlich konstant und nicht von äusseren Einflüssen abhängig, z.B. von Temperatur, Druck oder Ort. Das Gewicht hingegen ist eine Kraft und somit ein Vektor und womöglich ortsabhängig.

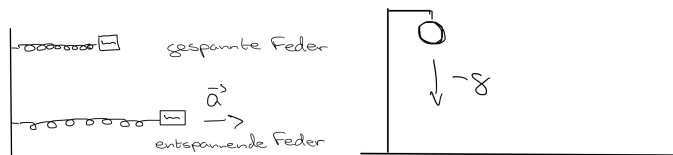
Masse misst man mit Balkenwaagen, Gewicht mit Federwaagen.

Beispiel: Ein Sack Kartoffeln von 40kg hat diese Masse auf der Erde, auf dem Mond und irgendwo im Weltraum. Die Masse ist konstant.

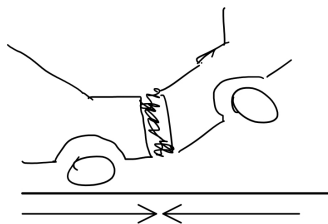
5.2 Kräfte

Kräfte erkennt man an deren Auswirkungen!

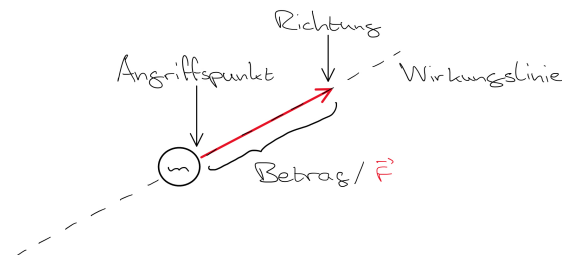
- Beschleunigung



- Deformation



Die Kraft hat eine Richtung und ist somit ein Vektor!



Skizze 5.1: Definition Vektor

Das Symbol der Kraft ist \vec{F} und steht für *fortitudo*.
Die Masseinheit der Kraft ist das *Newton*: $[F] = N$

$$1N = 1kg \cdot 1m/s^2 \tag{5.2.1}$$

Die Kraft wird über die Beschleunigung definiert.

Definition: Die Kraft ist Masse · Beschleunigung.

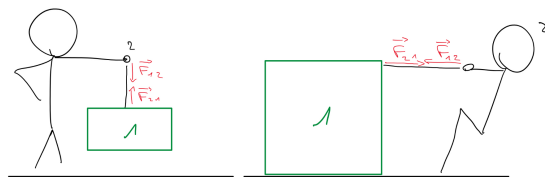
$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{5.2.2}$$

$$[F] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

Für die Vorstellung: 1N entspricht der Kraft um eine Tafel Schokolade zu halten, da die Erde die Schokolade mit etwa $10m/s^2$ nach unten beschleunigt, übt sie eine Kraft von $F = m \cdot a = 0.1kg \cdot 10m/s^2 = 1N$ auf die Schokolade aus. Möchten wir das verhindern, so müssen wir ebenfalls mit 1N dagegenhalten.

Kräfte treten immer paarweise auf. Die beiden ein Paar bildenden Kräfte...

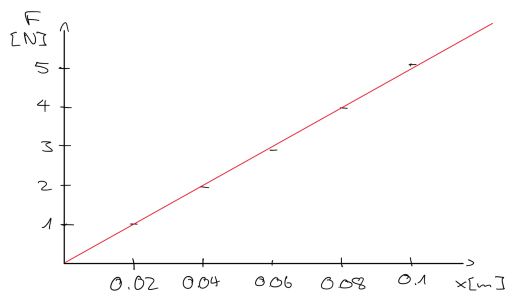
- ...sind immer gleich stark.
- ...sind immer entgegengesetzt gerichtet.
- ...greifen immer an zwei verschiedenen Körpern an.



Skizze 5.2: actio = reactio

Es ist somit $\vec{F}_{1\ 2} = \vec{F}_{2\ 1}$, actio = reactio

Kräfte messen: mit einer Federwaage! wie lenken eine Feder um verschiedene Strecken aus und lesen die dafür benötigte Kraft ab.



Kraft	$x [m]$	0	0.02	0.05	0.1
Auslenkung	$y [N]$	0	0.95	2.4	4.8

Tabelle 5.2.1: Auslenkung einer Feder (Beispiel)

Skizze 5.3: Auslenkung einer Feder (Beispiel)

Man sieht sofort, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen Auslenkung und Kraft gibt. Mathematisch drückt man das folgendermassen aus: $\vec{F} = \text{Konstante} \cdot \vec{x}$. Diese Konstante heisst **Federkonstante** D (manchmal auch f oder k). Die Einheit der Federkonstanten ist $[D] = \frac{N}{m}$. Bei „unserer“ Feder ist $D = \frac{F}{x} = \frac{4.8N}{0.1m} = \underline{\underline{48N/m}}$, d.h., um die Feder 1m zu dehnen, muss man 48N

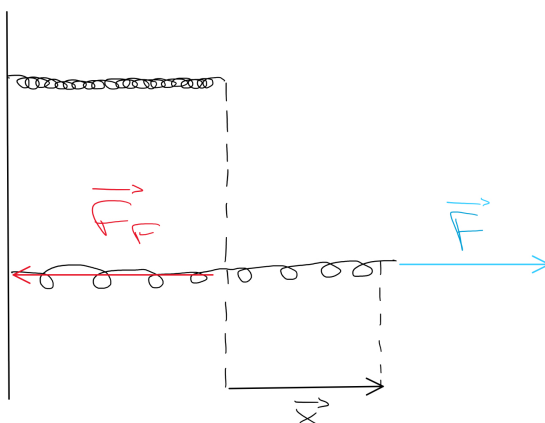
Kraft aufwenden.

Die Kraft, welche wir gemessen haben (mit der Federwaage) heisst **Federkraft** und wird mit dem **HOOKE'schen Gesetz** beschrieben:

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{x} \quad (5.2.3)$$

Begründung des negativen Vorzeichens:

Die Richtung der Federkraft \vec{F}_F ist immer entgegengesetzt der Auslenkung \vec{x} . \vec{F}_F wirkt in der Feder und versucht die Feder wieder in Originalzustand zu bringen (rücktreibende Kraft).



Skizze 5.4: Definition Federkraft

Beispiel: Welche Kraft ist von aussen aufzuwenden, um eine Feder ($D = 120\text{N/m}$) um 12cm zu drehen?

$$F = F_F = |-D \cdot \vec{x}| = D \cdot x = 120\text{N/m} \cdot 0.12\text{m} = \underline{\underline{14.4\text{N}}} \quad (5.2.4)$$

Es gilt somit:

$$\vec{F}_F = -\vec{F} \text{ bzw. } F_F = F \quad (5.2.5)$$

Beispiel: Eindimensional: $F_1 = 50\text{N}$ in positive x-Richtung, $F_2 = 80\text{N}$ in negative x-Richtung.

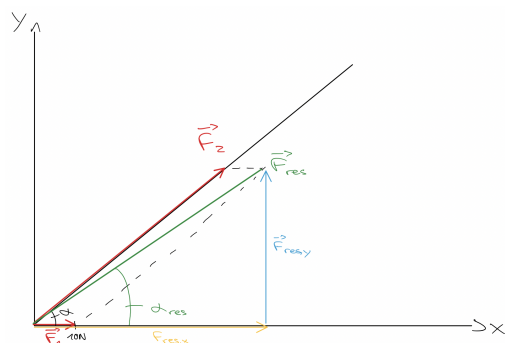
$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 50\text{N} + (-80\text{N}) = \underline{\underline{-30\text{N}}} \quad (5.2.6)$$

5.2.1 Vektoraddition von Kräften

Was passiert, wenn die eine Kraft \vec{F}_1 in die eine Richtung und die andere Kraft \vec{F}_2 in eine andere Richtung auf ein Objekt wirken?

Da Kräfte Vektoren sind, muss man sie auch wie Vektoren addieren.

Beispiel: Zweidimensional: $F_1 = 10\text{N}$ in positive x-Richtung, $F_2 = 30\text{N}$ unter einem Winkel $\alpha = 38^\circ$.



Skizze 5.5: Graphische Darstellung von Vektoraddition (Beispiel)

Rechnerisch:

Die resultierende Kraft \vec{F}_{res} ist die Vektorsumme der beiden angreifenden Kräfte:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{res} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 10N \\ 0N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30N \cdot \cos(38^\circ) \\ 30N \cdot \sin(38^\circ) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10N + 23.64N \\ 0N + 18.47N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 33.64N \\ 18.47N \end{pmatrix} \hat{=} \text{Komponenten}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{res} &= \sqrt{(F_{res,x})^2 + (F_{res,y})^2} \\ &= 38.38N \hat{=} \text{Betrag}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{res} &= \arctan\left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}\right) \\ &= 28.77^\circ\end{aligned}$$

(5.2.7)

Allgemeine Schreibweise:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} \vec{F}_{1,x} \\ \vec{F}_{1,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{F}_{2,x} \\ \vec{F}_{2,y} \end{pmatrix} \right) \hat{=} \text{Komponent}$$

$$F_{res} = \sqrt{(F_{res,x})^2 + (F_{res,y})^2} \hat{=} \text{Betrag} \quad (5.2.8)$$

$$\alpha_{res} = \arctan\left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}\right) \hat{=} \text{Winkel}$$

Theorem 1

Die resultierende Kraft \vec{F}_{res} auf eine Masse m ist die Vektorsumme aller an m angreifender Kräfte:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \quad (5.2.9)$$

Die Beschleunigung dieser Masse ist somit $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m}$.

Aufgabe:

gegeben: $F_1 = 20N, \alpha_1 = 105^\circ; F_2 = 30N, \alpha_2 = 240^\circ$

gesucht: $\vec{F}_{res}, F_{res}, \alpha_{res}$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{res} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} 60N \cdot \cos(30^\circ) \\ 60N \cdot \sin(30^\circ) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90N \cdot \cos(160^\circ) \\ 90N \cdot \sin(160^\circ) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80N \cdot \cos(230^\circ) \\ 80N \cdot \sin(230^\circ) \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 51.96N \\ 30N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -84.57N \\ 30.78N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -51.42N \\ -61.28N \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -84.03N \\ -0.50N \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{res} &= \sqrt{(F_{res,x})^2 + (F_{res,y})^2} \\
&= \underline{\underline{84.04N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{res} &= \arctan\left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}\right) \\
&= 0.34^\circ \Rightarrow +180^\circ \\
&= \underline{\underline{180.34^\circ}}
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\vec{F}_{res}}{m} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 51.96N \\ 30N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -84.57N \\ 30.78N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -51.42N \\ -61.28N \end{pmatrix}}{2kg} \\
&= \begin{pmatrix} -42.02m/s^2 \\ -0.25m/s^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{F_{res}}{m} \\
&= \underline{\underline{42.02m/s^2}}
\end{aligned}$$

5.2.2 Die Newtonschen Axiome

Die grundlegenden Gesetze wurden vom englischen Naturwissenschaftler Sir Isaac Newton (1642 - 1727) formuliert):

1. Trägheitssatz: Ein Körper bleibt in Ruhe oder in gleichförmiger, geradliniger Bewegung ($\vec{a} = 0$), solange die resultierende Kraft $\vec{F}_{res} = 0$ ist:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_{res} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \tag{5.2.11}$$

2. NEWTON'sches Grundgesetz: Um eine Masse m mit \vec{a} zu beschleunigen, ist eine resultierende Kraft \vec{F}_{res} nach folgendem Gesetz nötig:

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \tag{5.2.12}$$

3. Wechselwirkungsgesetz: Eine Kraft \vec{F}_{12} von Körper 1 auf Körper 2 ruft immer eine gleich grosse aber entgegengesetzte Kraft \vec{F}_{21} von Körper 2 auf Körper 1 hervor:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (\text{actio} = \text{reactio}) \tag{5.2.13}$$

Beispiel: Auf die Masse $m = 2\text{kg}$ wirken zwei Kräfte:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4\text{N} \\ -12\text{N} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -10\text{N} \\ 20\text{N} \end{pmatrix} \quad (5.2.14)$$

Damit ist die Beschleunigung von m :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} = \frac{\begin{pmatrix} 4\text{N} \\ -12\text{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10\text{N} \\ 20\text{N} \end{pmatrix}}{2\text{kg}} = \frac{\begin{pmatrix} -6\text{N} \\ 8\text{N} \end{pmatrix}}{2\text{kg}} = \begin{pmatrix} -3\text{m/s}^2 \\ 4\text{m/s}^2 \end{pmatrix} \quad (5.2.15)$$

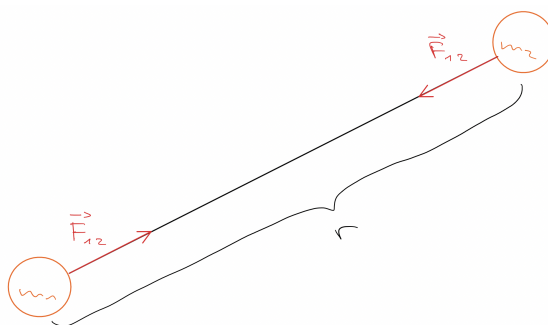
5.2.3 Die Gravitationskraft \vec{F}_G

Alle Massen ziehen sich an (Sir Isaac Newton) und zwar mit der sogenannten **Gravitationskraft** \vec{F}_G mit Betrag:

$$F_G = \frac{G \cdot m_1 m_2}{r^2}$$

mit:

- F_G der Gravitationskraft zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 in N
- G der sogenannten Gravitationskonstanten $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$
- m_1, m_2 und den beteiligten Massen in kg
- r den Abstand und zwischen den beiden Schwerpunkten m_1 und m_2 in m



Skizze 5.6: Anziehung von Massen

Beispiele:

1. Kraft zwischen der Sonne (m_1) und der Erde (m_2):

$$\vec{F}_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \text{kg} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}}{(1.496 \cdot 10^{11} \text{m})^2} = \underline{\underline{3.54 \cdot 10^{22} \text{N}}} \quad (5.2.16)$$

2. Kraft zwischen Erde und Mensch ($m = 70\text{kg}$) an der Erdoberfläche:

$$\vec{F}_G = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot 70\text{kg}}{(6.371 \cdot 10^6 \text{m})^2} = \underline{\underline{686.73\text{N}}} \quad (5.2.17)$$

Der 70kg Mensch erfährt somit eine Beschleunigung:

$$a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{F_G}{m} = \frac{686.73\text{N}}{70\text{kg}} = \underline{\underline{9.81\text{m/s}^2}} \quad (5.2.18)$$

Dies ist der Betrag der Erdbeschleunigung g .

Somit kann man die Erdbeschleunigung folgendermassen berechnen:

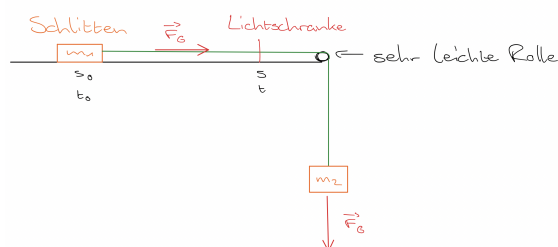
$$a = \frac{F}{m} = g = \frac{\frac{GMm}{r^2}}{m} = \frac{GM}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{(6.371 \cdot 10^6)^2} = \underline{\underline{9.81 \text{ m/s}^2}} \quad (5.2.19)$$

Man berechnet also die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche eines Planeten der Masse M und Radius r : $g_P = \frac{GM}{r^2}$

Somit gilt für die Gravitationskraft auf eine Masse m an der Erdoberfläche:

$$\vec{F}_G = m\vec{g} \text{ bzw. } F_G = mg \quad (5.2.20)$$

Experiment: Wir messen die Erdbeschleunigung g mit der Luftkissenbahn:



Skizze 5.7: Luftkissenbahn (Experiment)

Wir messen:

- $m_1 = 313.86 \text{ g}$
- $m_2 = 10 \text{ g}$
- $s = 1 \text{ m}$
- $t = 2.6 \text{ s}$
- $g = 9.58 \text{ m/s}^2$

Lösungsweg für Berechnung von g :

F_G := beschleunigende Kraft

F_{res} := zu beschleunigende Kraft

$$F_G = F_{res}$$

$$ma = (m_1 + m_2)a$$

$$m_2g = (m_1 + m_2)a$$

$$a: s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

(5.2.21)

$$m_2g = (m_1 + m_2)a$$

$$m_2g = (m_1 + m_2) \frac{2s}{t^2}$$

$$g = (m_1 + m_2) \frac{2s}{t^2 m_2}$$

$$= \underline{\underline{9.58 \text{ m/s}^2}}$$

5.2.4 Die Dichte ρ

Die Dichte (früher: spezifisches Gewicht) gibt Auskunft darüber, wieviel Material (Masse) in einem Körper (Volumen) steckt.

Beispiel: Ein Liter Wasser ist schwerer als ein Liter Luft, weil das Wasser dicht gepackt ist als Luft.

Die Dichte wird mit dem griechischen Buchstaben ρ (rho) abgekürzt und gibt an, wie viele Kilogramm (m) pro Kubikmeter (V) enthalten sind.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (5.2.22)$$

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

Beispiel:

1. Dichte bei $20^\circ C$:

$$\begin{aligned} \rho_{H_2O} &= 998 kg/m^3 \\ \rho_{Pb} &= 11'340 kg/m^3 \\ \rho_{Au} &= 19'290 kg/m^3 \\ \rho_{Luft} &= 1.293 kg/m^3 \text{ bei Normaldruck} \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

2. (Aufgabe) Wir mischen ein Liter Wasser mit 200g Schwefelsäure. Bestimme die Dichte der Mischung.

Wasser | $0.988 \cdot 10^3 kg/m^3$
Schwefelsäure | $1.84 \cdot 10^3 kg/m^3$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \\ &= \frac{m_W + m_S}{V_W + V_S} \\ &= \frac{V_W \cdot \rho_W + m_S}{V_W + \frac{m_S}{\rho_S}} \\ &= \frac{0.001m^3 \cdot 998kg \cdot m^{-3} + 0.2kg}{0.001m^3 + \frac{0.2kg}{1840kg/m^3}} \\ &= \underline{\underline{1080.55kg \cdot m^{-3}}} \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

5.2.5 Die Federkraft \vec{F}_F

Die Federkraft haben wir schon früher kennengelernt, als es allgemein um Kräfte ging (Messen von Kräften).

$$\vec{F}_F = -D\vec{x} \text{ bzw. } F_F = Dx \quad (5.2.25)$$

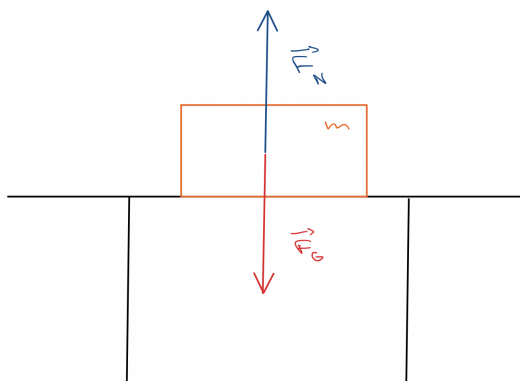
\Rightarrow HOOK'sches Gesetz

Merkmale der Federkraft:

- rücktreibende Kraft (minus beim vektoriellem Gesetz! bzw. Kraft will immer zurück zur Ruheposition, wie eine Pendel)
- linear in der Auslenkung x .

5.2.6 Die Normalkraft \vec{F}_N

Beispiel: Eine Kiste ($m = 12\text{kg}$) liegt auf einem Tisch. Wir zeichnen die Kräfte ein, welche auf die Kiste wirken:

Skizze 5.8: Normalkraft \vec{F}_N

Falls nur \vec{F}_G wirken würde, würde die Kiste ja beschleunigt (Newton II.). Also muss es noch eine andere Kraft geben, welche entgegen wirkt. Diese nennt man **Normalkraft** \vec{F}_N . \vec{F}_N muss hier also betragsmässig gleich gross sein wie \vec{F}_G und genau entgegengerichtet!

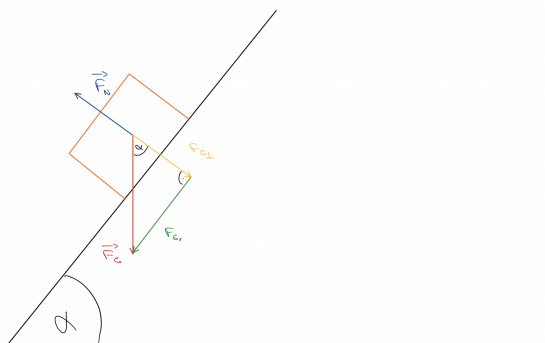
Hier also: $\vec{F}_N = -\vec{F}_G$

Allgemein: Die Normalkraft auf einen Körper...

- ... zeigt immer senkrecht vor der Unterlage weg.
- ... ist vom Betrag her immer so gross, wie die Kraft, mit welcher der Körper senkrecht auf die Unterlage drückt.
- ... gibt an, mit welcher Kraft die beiden beteiligten Körper aneinander gedrückt werden.

Beispiel:

Schiefe Ebene: Eine Kiste der Masse $m = 40\text{kg}$ liegt auf der Schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 35^\circ$



Skizze 5.9: Schiefe Ebene (Beispiel)

Aufgaben:

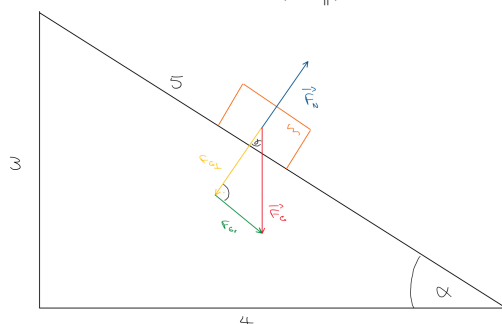
1. Eine Kiste wird auf eine reibungsfreie schiefe Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 35^\circ$ gelegt. Bestimme den Geschwindigkeitsbetrag der Kiste nach 4 Sekunden.
Skizze: siehe Abbildung ??

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 + at \\
 &= 0 + \frac{F}{m}t \\
 &= \frac{F_{G\parallel}}{m}t \\
 &= \frac{F_G \cdot \sin(\alpha)}{m}t \\
 &= \frac{mg \cdot \sin(\alpha) \cdot t}{m} \\
 &= g \cdot \sin(\alpha) \cdot t \\
 &= 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin(35^\circ) \cdot 4 \text{ s} \\
 &= \underline{\underline{22.51 \text{ m/s}}}
 \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

$F_{G\parallel}$ wird auch Hangantriebskraft genannt.
Für Abbildungen ?? mit $m = 40 \text{ kg}$.

$$\begin{aligned}
 F_G &= 392.4 \text{ N} \\
 F_{G\parallel} &= 225.07 \text{ N} \\
 F_{G\perp} &= 321.44 \text{ N} \\
 F_N &= 321.44 \text{ N}
 \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

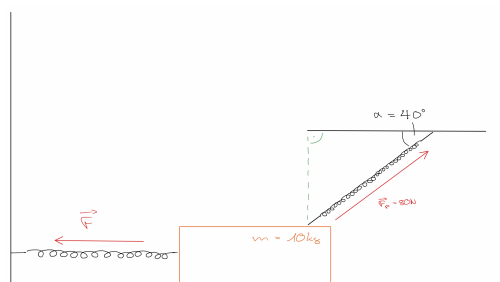
2. Eine Masse $m = 10 \text{ kg}$ liegt wie abgebildet auf einer Ebene. Bestimme die Normalkraft (\vec{F}_N) und Hangantriebskraft ($F_{G\parallel}$).



Skizze 5.10: Schiefe Ebene (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_N &= F_{G\perp} \\
 F_G \cdot \cos(\alpha) &= mg \cdot \frac{4}{5} \\
 &= \underline{\underline{78.48 \text{ N}}} \\
 F_{G\parallel} &= F_G \cdot \sin(\alpha) \\
 &= mg \cdot \frac{3}{5} \\
 &= \underline{\underline{58.86 \text{ N}}}
 \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

3. Bestimme F und die Normalkraft (F_N) auf die Kiste.

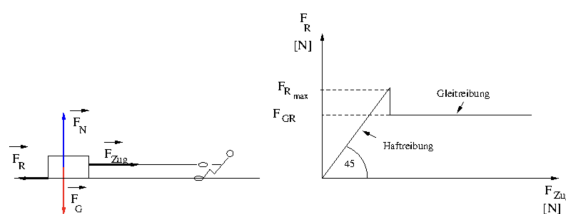


Skizze 5.11: Schiefe Ebene (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 F_{F\perp} + F_N - F_G &= 0 \\
 F_N &= F_G - F_{F\perp} \\
 &= mg - F \cdot \sin(40^\circ) \\
 &= \underline{\underline{46.68N}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= F_{F\parallel} \\
 &= F_F \cdot \cos(40^\circ) \\
 &= \underline{\underline{61.28^\circ}}
 \end{aligned}
 \tag{5.2.29}$$

5.2.7 Reibungskraft



Skizze 5.12: Reibungskraft

Wollen wir die Kiste mit der Zugkraft \vec{F}_{Zug} wegschleppen, so wird dies zunächst von der *Haftreibungskraft* verhindert. Vergrössern wir \vec{F}_{Zug} , wo wird die Haftreibung grösser, aber nur bis zu einem bestimmten maximalen Betrag F_{Rmax} . Ist die Kiste einmal in Bewegung, so wirkt die konstante Gleitreibungskraft \vec{F}_{GR} , deren Betrag kleiner ist als F_{Rmax} .

Folgende Grössen bestimmen die Reibungskraft:

- Material und Beschaffenheit der beiden Reibungsflächen
- Kraft, mit welcher die beiden Reibungsflächen aneinandergesprengt werden - also die Normalkraft \vec{F}_N

Es gilt: Die Reibungskraft ist ein Vielfaches (das μ -fache) der Normalkraft.

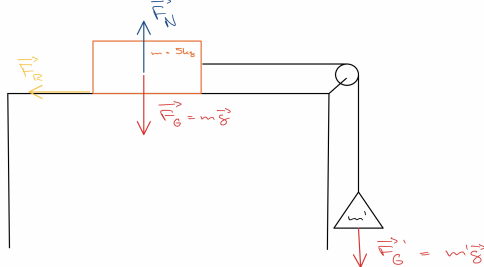
- $F_{Rmax} = \mu_{max} \cdot F_N$
- $F_{GR} = \mu_{Gleit} \cdot F_N$
- ($F_{Rroll} = \mu_{Roll} \cdot F_N$)

(F_R : Reibungskraft [N], F_N : Normalkraft [N], μ (mü) die Reibungszahl \rightarrow kann auch grösser sein als 1!)

Beispiel: Reibungskoeffizienten im Formelbuch auf S.189.

Aufgaben:

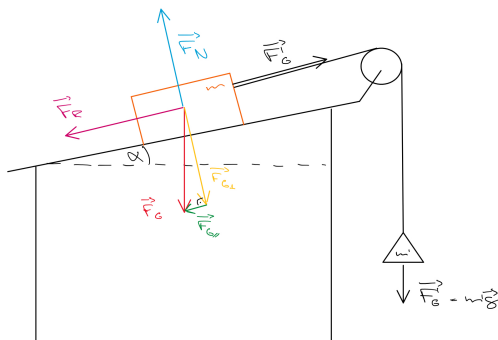
1. Diese Kiste $m = 5kg$ beginnt zu rutschen, wenn $m' = 600g$ ist. Bestimme μ_{max} zwischen Kiste und Tisch.



Skizze 5.13: Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 F'_G &= F_R \\
 m'g &= \mu_{max} \cdot F_N \\
 &= \mu_{max} \cdot F_G \cdot \cos(0^\circ) \\
 &= \mu_{max} \cdot F_G \\
 &= \mu_{max} \cdot mg \\
 \mu_{max} &= \frac{m'g}{mg} \\
 &= \frac{0.6kg}{5kg} \\
 &= \underline{\underline{0.12}}
 \end{aligned}
 \tag{5.2.30}$$

2. (Zusatzaufgabe) Gleiche Situation wie vorher, jedoch neigen wir den Tisch um $\phi = 2.5^\circ$, sodass die Kiste nach oben gezogen werden muss. Wie gross muss nun m' sein, damit die Kiste zu rutschen beginnt?

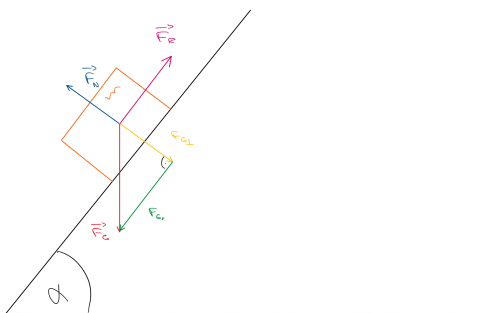


Skizze 5.14: Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 \vec{F}'_G &= F_R + F_{G\parallel} \\
 m'g &= F_N \cdot \mu_{max} + F_G \cdot \sin(\alpha) \\
 m'g &= mg \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu_{max} + mg \cdot \sin(\alpha) \\
 m' &= m(\cos(\alpha) \cdot \mu_{max} + \sin(\alpha)) \\
 &= \underline{\underline{0.8175kg}} \approx 817.5g
 \end{aligned}
 \tag{5.2.31}$$

3. Bestimmung der maximalen Haftreibungszahl μ_{max} durch eine Schiefe Ebene:

Wir legen eine Kiste der Masse m auf eine Schiefe Ebene und vergrössern den Neigungswinkel α , bis die Kiste zu rutschen beginnt. Der Ausdruck „... zu rutschen beginnt.“ bedeutet:



Skizze 5.15: Reibungskraft mit Schiefer Ebene (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 F_{G\parallel} &= F_R \\
 F_G \cdot \sin(\alpha) &= F_N \cdot \mu_{max} \\
 F_G \cdot \sin(\alpha) &= F_G \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu_{max} \\
 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} &= \mu_{max} \\
 &= \underline{\underline{\tan(\alpha)}}
 \end{aligned}
 \tag{5.2.32}$$

4. Ein Auto mit Masse 800kg kann eine Maximalkraft von 6000N vom Motor auf die Räder übertragen. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Rad und Strasse betrage 0.7 der Gleitreibungskoeffizient 0.6 . Wie lange braucht der Fahrer, um von 0 auf 100km/h zu beschleunigen, wenn er vollgas gibt? und wie lange dauert dieser Vorgang, wenn er nur gerade soviel Gas gibt, dass die Räder nicht durchdrehen?

$$F_{R_{max}} = mg\mu_{max} = \underline{5493.6\text{N}} < 6000\text{N} \Leftarrow \text{vollgas} \hat{=} F_{GR}$$

$$F_{GR} = mg\mu_{GR} = \underline{4708.8\text{N}} = F_{res}$$

$$v = v_0 + at$$

$$\frac{v - v_0}{a} = t \tag{5.2.33}$$

$$\frac{v - v_0}{\frac{F_R}{m}} =$$

$$\frac{v - v_0}{\frac{\mu_{GR} \cdot mg}{m}} = \underline{4.72\text{s}}$$

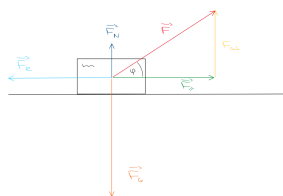
$$\frac{v - v_0}{\frac{\mu_H \cdot mg}{m}} = \underline{4.05\text{s}}$$

5. Auf einer Schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\phi = 38^\circ$ liegt eine Kiste. Wie gross muss der Haftreibungskoeffizient sein, damit sie nicht rutscht?

$$\tan(\alpha) = \mu$$

$$= \underline{0.78} \tag{5.2.34}$$

6. Der Götti zieht sein 23kg schweres Göttimaitli auf einem 8kg -Schlitten durch den Schnee. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Schnee und Kufen beträgt 0.3 . Wie gross ist die Zugkraft im Seil, wenn der Winkel zwischen Zugseil und Horizontalen $\phi = 40^\circ$ beträgt.



Skizze 5.16:
Reibungskraft mit
Schiefer Ebene (Bei-
spiel)

$$F_R = F_{\parallel}$$

$$F_N \mu_{GR} = F \cdot \cos(\phi)$$

$$(F_G - F_{G\perp}) \mu_{GR} = F \cdot \cos(\phi)$$

$$(mg - F \cdot \sin(\phi)) \mu_{GR} = F \cdot \cos(\phi)$$

$$mg\mu_{GR} - F \cdot \sin(\phi) \cdot \mu_{GR} = F \cdot \cos(\phi)$$

$$mg\mu_{GR} = F \cdot \cos(\phi) + F \cdot \sin(\phi) \cdot \mu_{GR}$$

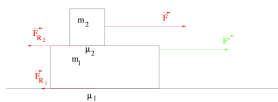
$$mg\mu_{GR} = F(\cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot \mu_{GR})$$

$$F = \frac{mg\mu_{GR}}{\cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot \mu_{GR}}$$

$$= \underline{95.15\text{N}} \tag{5.2.35}$$

7. Eine Kiste m_2 liegt auf einer Kiste m_1 . Eine Kraft F zieht horizontal an der Kiste m_2 . Was für Bedingungen müssen gelten, damit man das ganze Kistenpaket ($m_1 + m_2$) beschleunigen kann? Zahlenbeispiel: $m_1 = 20kg$, $m_2 = 15kg$, Haftreibungskoeffizient zwischen den Kisten $\mu_2 = 0.9$ und Gleitreibungskoeffizient zwischen m_1 und dem Boden $\mu_1 = 0.2$: Bestimme die maximal mögliche Beschleunigung.

Das ganze beginnt zu rutschen, wenn $F' = F_{R_{1,max}} = (m_1 + m_2) \cdot g\mu_{1,max}$. Es gibt dazu zwei Möglichkeiten:



Skizze 5.17:
Reibungskraft mit
Schiefer Ebene (Bei-
spiel)

- (a) m_2 bleibt auf m_1 haften, wenn $F < F_{R_{2,max}} = m_2g\mu_{2,max}$. Es gilt dann $F' = F$

- (b) m_2 gleitet auf m_1 , wenn $F > F_{R_{2,max}} = m_2g\mu_{2,max}$. Es gilt dann: $F' = F_{R_{2,G}} = m_2g\mu_{2,G}$.

Voll ausgereizt: $F' = F' = F_{R_{2,max}} = m_2g\mu_{2,max}$. Es resultiert: $F_{res} = F' - F_{1,GR}$, also $F_{res} = (m_1 + m_2)a = m_2g\mu_{2,max} - (m_1 + m_2)g\mu_{1,G}$. Somit ist

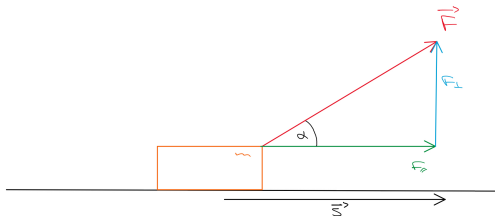
$$a_{max} = \frac{m_2g\mu_{2,max} - (m_1 + m_2)g\mu_{1,G}}{m_1 + m_2} = \underline{\underline{1.82m/s^2}} \quad (5.2.36)$$

5.3 Die Arbeit W

Wo (physikalisch) gearbeitet wird, werden mit Kraftaufwand Gegenstände verschoben. Die Arbeit W ist ein Skalar.

Zu einer Arbeit gehören immer...

- ... die Kraft \vec{F} , welche die Arbeit verrichtet (Vektor)
- ... die Strecke \vec{s} , über welche ein Objekt verschoben wird (Vektor)



Skizze 5.18: Arbeit (Beispiel)

Falls die Kraft \vec{F} konstant ist, dann gilt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot \cos(\alpha) \cdot s = F_{\parallel} \cdot s \quad (5.3.1)$$

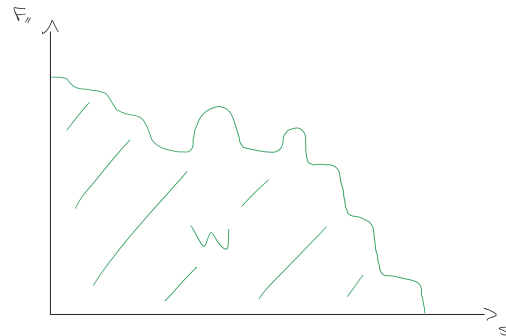
Arbeit = Kraft in Wegrichtung mal Weg.

Die Einheit der Arbeit ist das Joule $[W] = N \cdot m = J$.

Darstellung der Arbeit im Kraft-Weg-Diagramm:



Skizze 5.19: Kraft-Weg-Diagramm (mit konstanter Kraft F_{\parallel})



Skizze 5.20: Kraft-Weg-Diagramm (mit nicht konstanter Kraft F_{\parallel})

Merke: Die Arbeit entspricht der Fläche unter der Kurve im F_{\parallel} - s -Diagramm.

Exkurs - Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt aus zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ist:

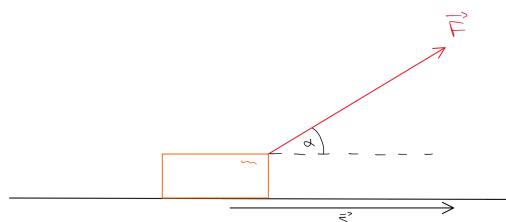
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (5.3.2)$$

Beispiel: Der Götti zieht sein Patenkind auf den Schlitten $250m$ über den Schnee. Er zieht am Seil mit einer Kraft $F = 370N$, welche einen Winkel von $\phi = 43^\circ$ zur Strecke \vec{s} einschliesst.

Wir bestimmen die Arbeit:

Nachweis 1:

$$\begin{aligned} W &= F \cdot \cos(\alpha) \cdot s \\ &= 370N \cdot \cos(43^\circ) \cdot 250m \\ &= 67'650.22J \approx \underline{\underline{67.65kJ}} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$



Skizze 5.21: Arbeit (Beispiel)

Nachweis 2:

\vec{F} und \vec{s} als dreidimensionale Komponentenvektoren: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0N \\ 270.60N \\ 252.34N \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0m \\ 250m \\ 0m \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W &= 0 \cdot 0 + 270.60N \cdot 250m + 252.34N \cdot 0 \\ &= 67'650.22J \approx \underline{\underline{67.65kJ}} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Aufgabe: Bestimme die jeweils verrichtete Arbeit:

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10N \\ 0N \\ 0N \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0m \\ 3m \\ 0m \end{pmatrix} = \underline{\underline{0J}}$

b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10N \\ 0N \\ 0N \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4m \\ 0m \\ 0m \end{pmatrix} = \underline{\underline{40J}}$

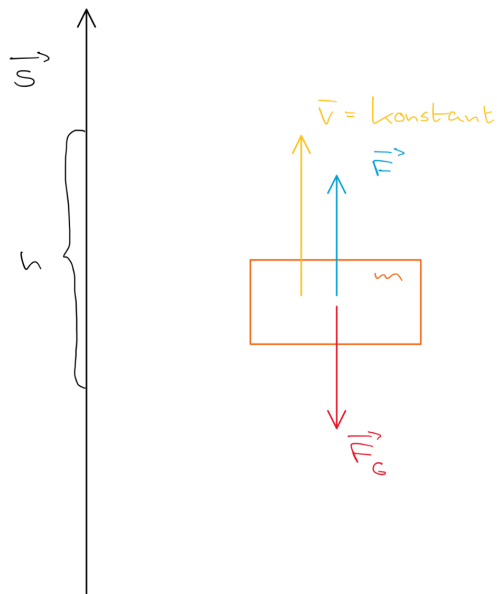
c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10N \\ 20N \\ 0N \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4m \\ 0m \\ 0m \end{pmatrix} = \underline{\underline{40J}}$

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10N \\ 20N \\ -15N \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4m \\ 3m \\ 0m \end{pmatrix} = \underline{\underline{100J}}$

e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10N \\ 20N \\ -15N \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4m \\ 3m \\ 10m \end{pmatrix} = \underline{\underline{-50J}}$

5.3.1 Die Hubarbeit W_{Hub}

Ein Körper der Masse m soll mit konstanter Geschwindigkeit und reibungsfrei um die Höhe h angehoben werden. Wie viel Arbeit ist dafür zu verrichten?



$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{res} = \underbrace{\vec{F} + \vec{F}_G}_{\text{vektoriell}^a} = 0 \Rightarrow \underbrace{F = F_G}_{\text{nicht vektoriell}^b} \quad (5.3.5)$$

\vec{F} ist die Arbeit ausführende Kraft, also

$$\begin{aligned} W &= F \cdot \cos(\alpha) \cdot s = F \cdot \underbrace{\cos(0^\circ)}_1 \cdot s \\ &= F \cdot s = F_G \cdot h \\ &= mgh \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

^aals Vektor, d.h. Orientierung relevant
^bals Betrag, d.h. Orientierung irrelevant ergo
Pfeile sind gleich lang

Skizze 5.22: Hubarbeit (Beispiel)

Hubarbeit: $W_{\text{Hub}} = mgh$

mit:

- m der zu hebenden Masse in kg
- g der Erdbeschleunigung (für $h \lesssim 30km \Rightarrow g = 9.81m/s^2$)
- h der Hubhöhe in m

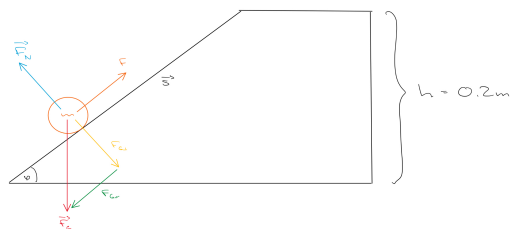
Für die Vorstellung:

Eine Tafel Schokolade ($m = 0.1kg$) auf den $1m$ hohen Tisch heben:

$$\begin{aligned} W_{\text{Hub}} &= mgh \\ &= 0.1kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 1m \\ &= 0.981J \approx \underline{1J} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

5.3.2 Ist die Hubarbeit abhängig von der Wahl der Transportroute?

Wir sollen eine Walze der Masse $m = 1kg$ auf ein Podest der Höhe $h = 0.2m$ ziehen. Dafür stehen uns verschiedene Schiefe Ebenen zur Auswahl (unterschiedlich lange „Bretter“). Zeige, dass die nötige Hubarbeit unabhängig von der Wahl der Schiefen Ebene ist.



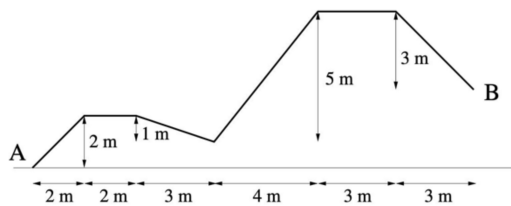
Skizze 5.23: Hubarbeit (Wegunabhängigkeit) (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 F &= F_{G\parallel} \\
 W &= \vec{F} \cdot \vec{s} \Rightarrow F \cdot s, \text{ weil der Winkel } 0^\circ \text{ ist} \rightarrow \cos(0^\circ) = 1 \\
 &= F_{G\parallel} \cdot \frac{h}{\sin(\phi)} \\
 &= F_G \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{h}{\sin(\phi)} \\
 &= F_G h \\
 &= mgh \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.8}$$

Ergo: Die Arbeit ist ortsunabhängig.

Aufgaben:

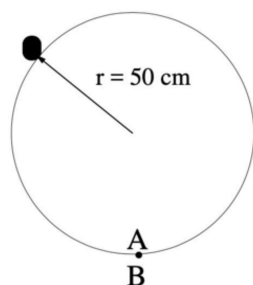
- Bestimme die Arbeit, welche an der Masse $m = 3kg$ an der Erdoberfläche verrichtet wird, um von A nach B zu kommen. Die Bewegung ist unbeschleunigt und reibungsfrei.



Skizze 5.24: Hubarbeit (Wegunabhängigkeit) (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 W &= mgh \\
 &= 3kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 3m \\
 &= \underline{\underline{88.29J}}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.9}$$

- Ein Junge schwingt einen Milchkessel der Masse $m = 1.5kg$ auf einer vertikalen Kreisbahn von A nach B. Wieviel Arbeit wird am Milchkessel für einen vollen Umlauf verrichtet?¹



Skizze 5.25: Hubarbeit (Wegunabhängigkeit) (Beispiel)

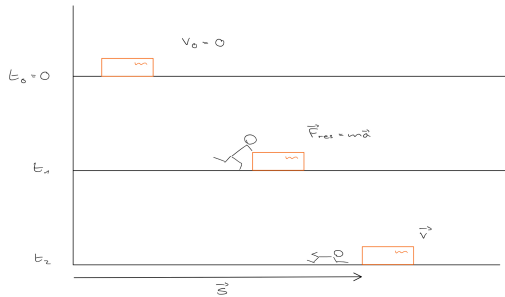
$$\begin{aligned}
 W &= mgh \\
 &= \underline{\underline{0J}}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.10}$$

Nur Anfangs- und Endpunkt sind wichtig!

¹Wenn sich B oberhalb (+) bzw. unterhalb (-) der Kreishälfte (mit Winkel α) befindet, wird für die Höhe $r \pm \sin(\alpha) \cdot r = h$ gerechnet.

5.3.3 Die Beschleunigungsarbeit W_B

Ein Bob der Masse m beschleunigt aus dem Stillstand horizontal und reibungsfrei auf die Endgeschwindigkeit \vec{v} . Dazu ist die Konstante Kraft $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ aufzubringen. Wir bestimmen die investierte Beschleunigungsarbeit W_B .



geg.: m und \vec{v}
ges.: W_B

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ Da \vec{F} und \vec{s} parallel sind,
gilt $W = F \cdot s = mas$

$$\text{Aus } v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$W = mas = ma \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a} = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

Skizze 5.26: Beschleunigungsarbeit (Beispiel)

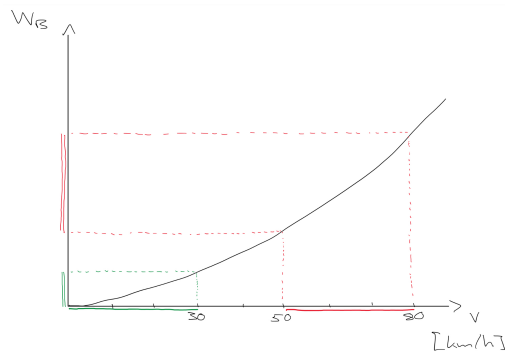
Hier ist $v_0 = 0 \Rightarrow W_B = \frac{1}{2}mv^2$ (5.3.11)

Allgemein:

$$W_B = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$
 (5.3.12)

Beispiel: Ein Auto der Masse $m = 1500kg$ wird einmal von 0 auf $30km/h$ und einmal von $50km/h$ auf $80km/h$ beschleunigt. Wir berechnen die beiden Beschleunigungsarbeiten.

Graphisch:



Skizze 5.27: Beschleunigungsarbeit (Beispiel)

Rechnerisch:

0 – 30:

$$W_B = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1500kg \left[\left(\frac{30}{3.6} m/s \right)^2 - 0 \right]$$

$$= \underline{\underline{5.21 \cdot 10^4 J}}$$
 (5.3.13)

50 – 80:

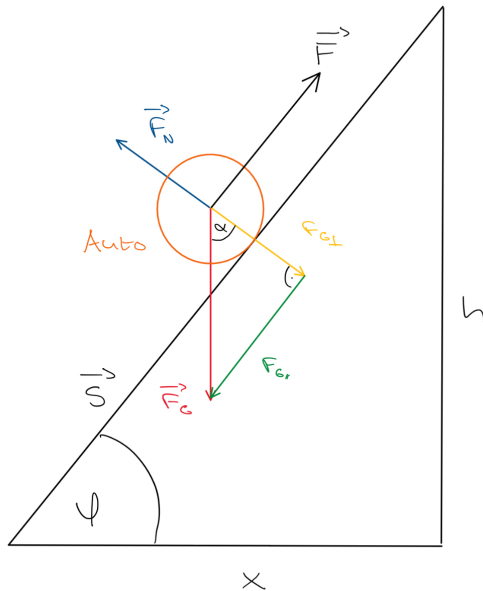
$$W_B = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1500kg \left[\left(\frac{80}{3.6} m/s \right)^2 - \left(\frac{50}{3.6} m/s \right)^2 \right]$$

$$= \underline{\underline{22.6 \cdot 10^4 J}}$$
 (5.3.14)

Aufgaben:

- Ein Auto der Masse $m = 900\text{kg}$ beschleunigt aus dem Stillstand gleichmässig bergauf. Die Strasse hat eine konstante Steigung von 10%. Um einen Weg von 216m zurückzulegen, benötigt das Auto 12s . Wie gross ist die Beschleunigungsarbeit, Hubarbeit und Gesamtarbeit?



Skizze 5.28: Arbeit (Beispiel)

$$W_B = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}m \left(\frac{2s}{t}\right)^2 = \underline{\underline{583'200J}}$$

$$W_H = mgh = mgs \cdot \sin(\arctan(m^a)) = \underline{\underline{189'759.96J}}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s = (F_{G\parallel} + F_{res}) \cdot s$$

$$= \left(mg \cdot \sin(\phi) + m \frac{2s}{t^2}\right) s = \underline{\underline{772'959.96J}}$$

(5.3.15)

^aSteigung $\hat{=} m$

- Ein Wagen mit Masse $m = 1200\text{kg}$ wird gleichmässig auf horizontaler Strasse beschleunigt. Um die ersten 50m zurückzulegen, benötigt man eine Arbeit von 15kJ . Wie gross sind Beschleunigung und Endgeschwindigkeit?

$$W_B = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{W_B}{\frac{1}{2}m} = v^2$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot W_B}{m}} = v$$

$$= \underline{\underline{5\text{m/s}}}$$

(5.3.16)

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$\frac{v^2}{2s} = a$$

$$= \underline{\underline{0.25\text{m/s}^2}}$$

Exkurs - Definition der Steigung

Die Steigung einer Schrägen wird folgendermassen definiert: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\phi) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

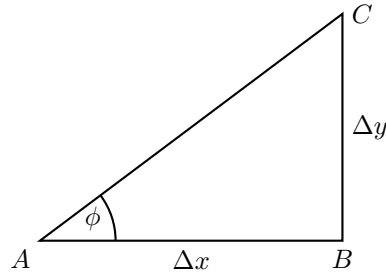
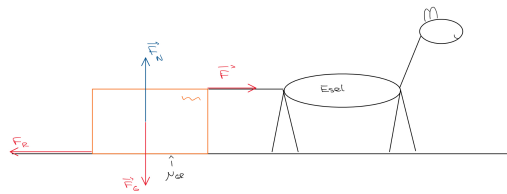


Abbildung 5.3.1: Definition der Steigung

5.3.4 Die Reibungsarbeit W_R



Skizze 5.29: Reibungsarbeit

Die Kiste soll auf horizontaler Strasse mit konstanter Geschwindigkeit ($\vec{a} = 0$) mit der Kraft \vec{F} gegen die Reibungskraft \vec{F}_R um die Strecke \vec{s} verschoben werden.

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{res} = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{F} + \vec{F}_R}_{\vec{F}_N + \vec{F}_G = 0} = 0 \Rightarrow F = F_R \quad (5.3.17)$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = {}^a F \cdot s = F_R \cdot s \quad (5.3.18)$$

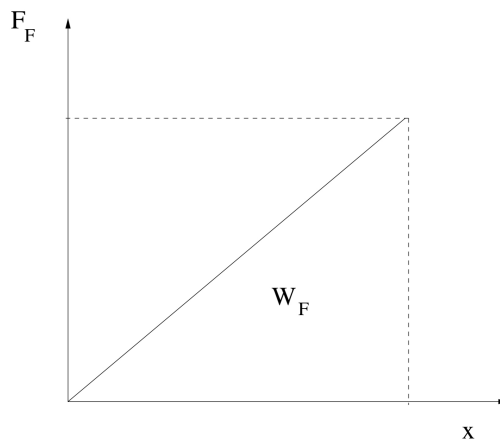
Reibungsarbeit:

$$W_R = F_R \cdot s \quad (5.3.19)$$

${}^a \vec{F}$ und \vec{s} sind parallel, daraufhin ist $\cos(0^\circ) = 1$

5.3.5 Die Federarbeit W_F

Wir zeichnen die Federkraft F_F gegen die Auslenkung x auf:



Skizze 5.30: Federarbeit

Die Arbeit ist die Fläche unter der Kraft-Weg Kurve. Die ist hier die Fläche eines Dreiecks:

$$W_F = F_F \cdot x \cdot \frac{1}{2} = D \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{2} \tag{5.3.20}$$

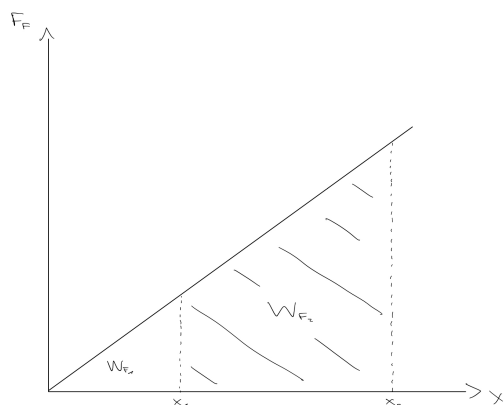
Somit ist die Federarbeit:

$$W_F = \frac{1}{2} D x^2 \tag{5.3.21}$$

Achtung: Dies ist die Arbeit, welche verrichtet wird, um eine Feder aus der *Ruhelage* bis x zu dehnen, jedoch bleibt die Federkraft *linear*.

Beispiele: Wieviel Arbeit muss jemand verrichten um eine Feder ($D = 15'000\text{N/m}$)...

a) ... aus der Ruhelage $x_1 = 3\text{cm}$ zu dehnen?



Skizze 5.31: Federarbeit (Beispiel)

$$\begin{aligned} W_{F_1} &= \frac{1}{2} D x^2 \\ &= 0.5 \cdot 15'000\text{N/m} \cdot (0.03\text{m})^2 \\ &= \underline{\underline{6.75\text{J}}} \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

b) ... von $x_1 = 3\text{cm}$ auf $x_2 = 6\text{cm}$ zu dehnen?

$$\begin{aligned} W_{F_2} &= W_F - W_{F_1} \\ &= \frac{1}{2} D x^2 - \frac{1}{2} D x_1^2 \\ &= \frac{1}{2} D (x^2 - x_1^2) \\ &= 0.5 \cdot 15'000\text{N/m} \cdot ((0.06\text{m})^2 - (0.03\text{m})^2) \\ &= \underline{\underline{20.25\text{J}}} \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

5.4 Die Leistung P

Wer eine Arbeit in kürzerer Zeit verrichtet, leistet mehr.

Definition: Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$ $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Leistung ist also die pro Sekunde verrichtete Arbeit.

Die Einheit der Leistung ist das Watt: $[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$

Beispiele:

1. Ich steige innerhalb von fünf Stunden von Haldenstein auf den Calanda, d.h. von 600 m.ü.M. auf 2800 m.ü.M..

a) Wir berechnen die Leistung:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{65\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot (2800\text{m} - 600\text{m})}{5 \cdot 3600\text{s}} = \underline{\underline{77.94\text{W}}} \tag{5.4.1}$$

b) Wie viel kostet meine Steigarbeit mit dem Tarif $1kWh = 15Rp.$?

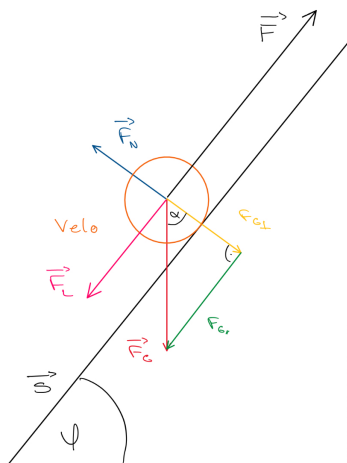
$$W_{Hub} = mgh = 65kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 2200m = 1'402'830J \quad (5.4.2)$$

$1kWh = 3'600'000J = 15Rp.$ und durch Proportionalität folgt $5.85Rp.$ für den Aufstieg.

2. Velorennen: Chur - Arosa

- Masse: (Rennfahrer plus Velo) $m = 75kg$
- Distanz: $d = 30km$
- Höhendifferenz: $\Delta h = 1200m$
- Zeit: $t = 1h$
- Luftwiderstand: $F_L = 5\%$ der Gewichtskraft
- Geschwindigkeit: $v = \text{konstant}$

Gesucht: mittlere Leistung



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\Delta W}{\Delta t} \\
 &= \frac{W_{Hub} + W_L^a}{\Delta t} \\
 &= \frac{mg\Delta h + F_G \cdot 0.05 \cdot s}{\Delta t} \\
 &= \frac{75kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 1200m + 75kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 0.05 \cdot 30'000m}{3600s} \\
 &= \underline{\underline{551.81W}}
 \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

^a $W_L = F_L \cdot s = F_G \cdot \text{Luftwiderstandsfaktor } l \cdot s = mgl$ und F_G , weil Gewichtskraft

Skizze 5.32: Leistung (Beispiel)

5.4.1 Die momentane Leistung

Beispiel: Eine Lokomotive zieht einen Zug mit der momentanen Geschwindigkeit $v = 100km/h$. Sie wendet dafür eine Kraft $F = 130kN$ auf. Wir bestimmen die momentane Leistung der Lokomotive.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = F \cdot v \quad v = \text{Geschwindigkeit} \quad (5.4.4)$$

Die momentane Leistung ist das Produkt aus momentaner Kraft und momentaner Geschwindigkeit.

$$F \cdot v \quad (5.4.5)$$

Für unseren Fall gilt: $P = F \cdot v = 130kN \cdot \frac{100}{3.6}m/s \approx \underline{\underline{3.61MW}}$

5.5 Die Energie E

Energie ist gespeicherte Arbeit oder die Fähigkeit Arbeit zu verrichten. Arbeit und Energie sind äquivalent! D.h. Arbeit und Energie haben die gleiche Einheit: Joule.

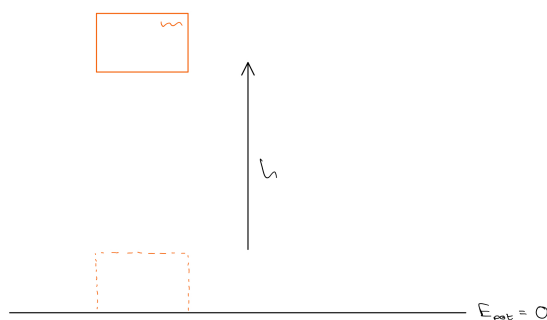
Man unterscheidet verschiedene Energiesorten:

- Mechanische Energie
 - Lageenergie (potenzielle Energie)
 - Bewegungsenergie (kinetische Energie)
 - Elastische Energie (Federenergie)
- Chemische Energie
- Wärmeenergie
- Elektrische Energie
- Atomkernenergie (Nuklearenergie)

5.5.1 Die potenzielle Energie E_{pot}

Die potenzielle Energie E_{pot} einer Masse m entspricht die Hubarbeit W_{Hub} , welche jemand aufgebracht hat, um die Masse m 100m Nullniveau ($E_{\text{pot}} = 0$) in die Höhe h zu heben.

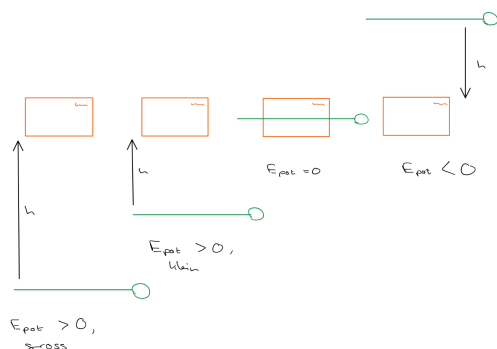
$$E_{\text{pot}} = mgh \tag{5.5.1}$$



Skizze 5.33: Potenzielle Energie

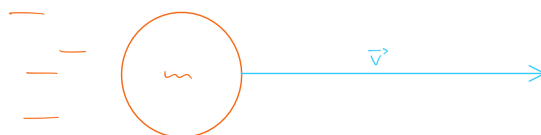
Diese Formel gilt für die für die Höhen $h \lesssim 30\text{km}$ über die Erdoberfläche.

Vorzeichenkonvention:



Eine Kiste der Masse m befindet sich stets an der gleichen Position. Das **Nullniveau** der potenziellen Energie wird jedoch an vier verschiedenen Position gewählt. Diese kann im Prinzip frei gewählt werden. Somit kann ein und dieselbe Kiste verschieden grosse potenzielle Energien aufweisen.

Skizze 5.34: Position des Nullniveaus

5.5.2 Die kinetische Energie E_{kin} 

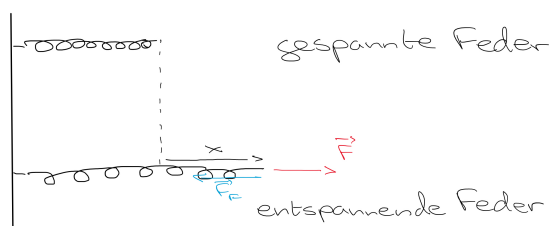
Skizze 5.35: Kinetische Energie

In einer sich bewegenden Masse m ist die Beschleunigungsarbeit $W_B = \frac{1}{2}mv^2$ als kinetische Energie gespeichert. W_B wurde investiert, um die Masse m aus dem Stillstand auf die Geschwindigkeit \vec{v} zu beschleunigen. Somit ist:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.5.2)$$

Beispiele:

- Fussgänger: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 95\text{kg} \cdot (1.5\text{m/s})^2 = \underline{\underline{106.88\text{J}}}$
- Velofahrer: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 95\text{kg} \cdot (10\text{m/s})^2 = \underline{\underline{4750\text{J}}}$
- Fallschirmspringer im freien Fall: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 95\text{kg} \cdot (69\text{m/s})^2 = 226'147.5\text{J} \approx \underline{\underline{2.26 \cdot 10^5\text{J}}}$

5.5.3 Die elastische Energie oder Federenergie E_F 

Skizze 5.36: Elastische Energie / Federenergie

Die Arbeit, um eine Feder der Konstanten D vom entspannten Zustand um \vec{x} zu dehnen, ist als Federenergie gespeichert:

$$E_F = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (5.5.3)$$

5.5.4 Der Energieerhaltungssatz

Alle in Rechnung gestellten Körper bilden „mein“ System. Die Gesamtenergie des Systems bleibt immer erhalten, solange kein Energieaustausch mit der Umgebung passiert. Einen Austausch gibt es, wenn von aussen Arbeit am System verrichtet wird bzw. wenn das System Arbeit für aussen verrichtet.

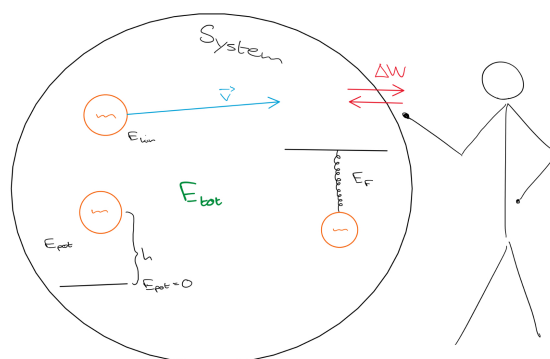


Abbildung 5.5.1: System des Energieerhaltungssatzes

Theorem 2 - Energieerhaltungssatz

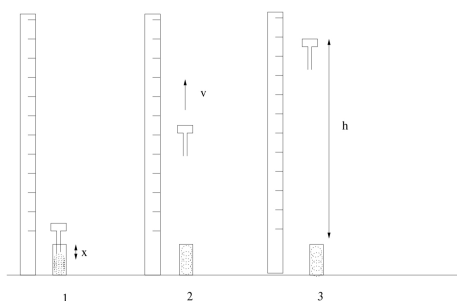
Wenn von aussen weder Arbeit zugeführt noch entnommen wird, dann bleibt die Gesamtenergie in einem System stets erhalten.

Ein System ist genau dann abgeschlossen, wenn $\Delta W = 0$.

Beispiele:

1. Federkatapult

Ein Eisennagel ($m = 150g$) wird vom Federkatapult in die Höhe geschossen. Die Feder wird um $4cm$ gestaucht. Man kann die maximal erreichte Höhe messen ($h = 98cm$). Wir wollen daraus die Federkonstante D ermitteln.



$$E_{tot, 1} = E_{tot, 2}^a = E_{tot, 3}$$

$$\Rightarrow E_{tot, 1} = E_{tot, 2}$$

$$E_{pot} + E_F = E_{pot} + E_{kin}$$

$$0 + \frac{1}{2}Dx^2 = mgh + 0$$

$$D = \frac{mgh}{\frac{1}{2}x^2}$$

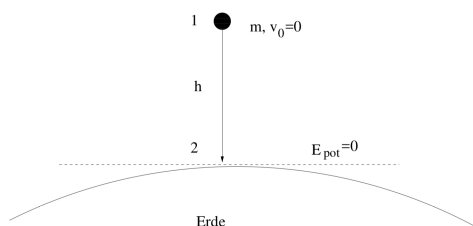
$$= \underline{\underline{1802.59N/m}}$$

^aSituation 2 ausslassen, weil E_{pot} und E_{kin} vorhanden sind.

Skizze 5.37: Energie (Beispiel)

2. Fallender Körper

Wie schnell trifft ein fallender Körper auf der Endoberfläche auf, wenn er aus einer Höhe h fallengelassen wurde?



Skizze 5.38: Energie (Beispiel)

Kinematisch:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2as \\ &= -2g(-h) \\ &= 2gh \end{aligned}$$

$$v = \underline{\underline{\pm\sqrt{2gh}}}$$

Dynamisch:

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}, 1} &= E_{\text{tot}, 2} \\ E_{\text{pot}, 1} + E_{\text{kin}, 1} &= E_{\text{pot}, 2} + E_{\text{kin}, 2} \end{aligned}$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

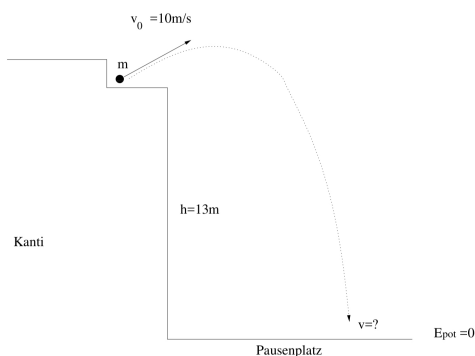
$$v^2 = 2gh$$

$$v = \underline{\underline{\pm\sqrt{2gh}}}$$

Energieerhaltung bedeutet, dass die Gesamtenergie am Anfang (Position 1) gleich gross ist wie am Ende (Position 2).

3. Schuss von der Kanti

13m über dem Pausenplatz wird ein Schneeball mit $v_0 = 10\text{m/s}$ abgeschossen. Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit auf dem Pausenplatz?



Skizze 5.39: Energie (Beispiel)

Kinematisch:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2as \\ v &= \pm\sqrt{v_0^2 + 2gh} \\ &= \underline{\underline{18.84\text{m/s}}} \end{aligned}$$

Dynamisch:

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{tot}}^a \\ E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \\ mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 &= 0 + \frac{1}{2}mv^2 \\ \frac{mgh + \frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}m} &= v^2 \\ \sqrt{2gh + \frac{1}{2}v_0^2} &= v \\ &= \underline{\underline{18.84\text{m/s}}} \end{aligned}$$

^aIndices nicht notwendig!

4. Senkrechter Abschuss

Eine Kugel wird mit $v_0 = 12m/s$ senkrecht nach oben abgeschossen.

a) Welche Höhe erreicht sie?

Kinematisch:

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{-2a} = s$$

$$= \underline{7.34m}$$

Dynamisch:

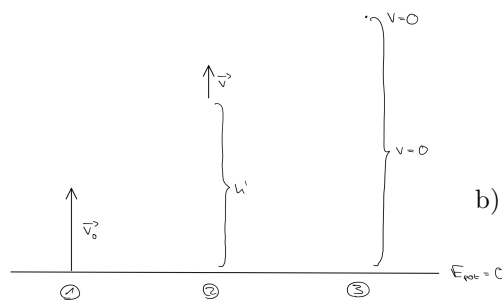
$$E_{\text{tot}, 1} = E_{\text{tot}, 3}$$

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh + 0$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{mg} = h$$

$$\underline{7.34m}$$



Skizze 5.40: Energie (Beispiel)

b) In welcher Höhe ist die Geschwindigkeit nur noch 60% der Anfangsgeschwindigkeit?

Kinematisch:

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{-2a} = s$$

$$= \underline{4.70m}$$

Dynamisch:

$$E_{\text{tot}, 1} = E_{\text{tot}, 2}$$

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

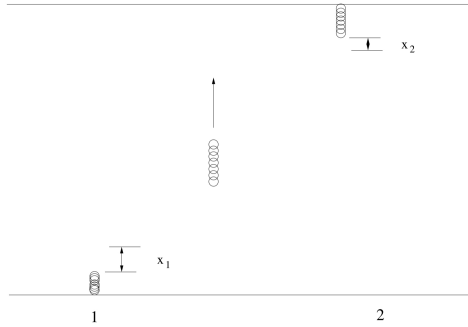
$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh' + \frac{1}{2}mv_{60\%}^2$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_{60\%}^2}{mg} = h'$$

$$= \underline{4.70m}$$

5. Springende Feder

Einer sehr kleine aber sehr starke Feder ($m = 3g$, $D = 8000N/m$) wird am Boden um $5mm$ zusammengestaucht. Nach dem Loslassen springt sie senkrecht $2m$ hoch an die Decke. Wie stark wird sie an der Decke zusammengestaucht?

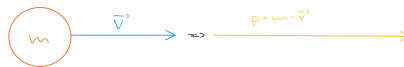


$$\begin{aligned}
 E_{\text{tot}, 1} &= E_{\text{tot}, 2} \\
 E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{F}} &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{F}} \\
 0 + 0 + \frac{1}{2}Dx_0^2 &= mgh + 0 + \frac{1}{2}Dx^2 \\
 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}Dx_0^2 - mgh}{\frac{1}{2}D}} &= x \\
 &= 3.21 \cdot 10^{-3}m \approx \underline{\underline{3.21mm}}
 \end{aligned}$$

Skizze 5.41: Energie (Beispiel)

5.6 Der Impuls \vec{p}

Sir Isaac Newton hat vorgeschlagen, eines sich bewegenden Masse m die physikalische Grösse Impuls folgendermassen zuzuordnen:



Skizze 5.42: Impuls (Theorie)

Der Impuls hat die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit, ist aber m mal grösser.

Definition:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{5.6.1}$$

Die Einheit des Impulses $[p] = [m \cdot v] = kg \cdot m/s = kg \cdot m/s^2 = N \cdot s$

Beispiele:

1. Fussgänger mit $m = 60kg$ und $v = 1m/s$. Dann ist der Impuls (als Betrag) $p = m \cdot v = 60kg \cdot 1m/s = \underline{\underline{60Ns}}$
2. Tennisball mit $m = 60g$ und $v = 30m/s$. Dann ist der Impuls (als Betrag) $p = m \cdot v = 0.06kg \cdot 30m/s = \underline{\underline{1.8Ns}}$

5.6.1 Der Impuls eines Systems

Der Gesamtimpuls eines Systems (aller betrachteten Körper) erhält man durch vektorielle Addition aller Einzelimpulse.

Beispiele:

Ein Wagen ($m_1 = 2kg$) fährt mit $v_1 = 4m/s$ nach rechts. Ein zweiter Wagen ($m_2 = 3kg$) fährt

mit $v_2 = 1\text{m/s}$ nach...

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 \cdot v_1 = 8Ns \\ p_2 &= m_2 \cdot v_2 = 3Ns \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

a) ... rechts.

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{tot}} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ &= 2kg \cdot 4\text{m/s} + 3kg \cdot 1\text{m/s} = \underline{\underline{11Ns}} \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

b) ... links.

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{tot}} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ &= 2kg \cdot 4\text{m/s} + 3kg \cdot (-1\text{m/s}) = \underline{\underline{5Ns}} \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

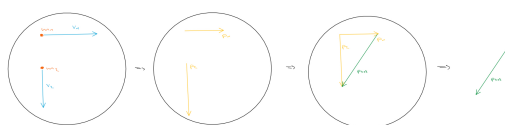
c) ... unten.

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{tot}} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ &= 2kg \cdot \begin{pmatrix} 4\text{m/s} \\ 0 \end{pmatrix} + 3kg \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1\text{m/s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8Ns \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3Ns \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8Ns \\ -3Ns \end{pmatrix}}} \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

$$p_{\text{tot}} = \sqrt{p_{\text{tot}, x}^2 + p_{\text{tot}, y}^2} = \sqrt{(8Ns)^2 + (-3Ns)^2} = \underline{\underline{8.54Ns}} \quad (5.6.6)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p_{\text{tot}, y}}{p_{\text{tot}, x}}\right) = \arctan\left(\frac{-3Ns}{8Ns}\right) = \underline{\underline{-20.56^\circ}} \quad (5.6.7)$$

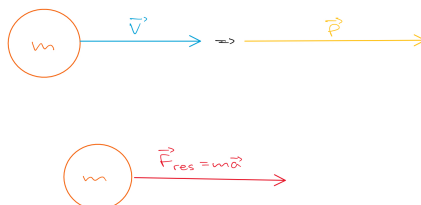
Bestimme für alle drei Situationen den Gesamtimpuls \vec{p}_{tot} .



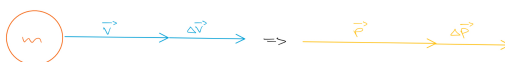
Skizze 5.43: Impuls (Theorie)

5.6.2 Die Änderung des Impulses

Eine Masse m hat zurzeit $t = 0$ die Geschwindigkeit \vec{v} , also den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$. Dann wirkt während einer Zeit Δt die Kraft $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$.

$t = 0$ 

Skizze 5.44: Impuls (Theorie)

 $t = \Delta t$ 

Skizze 5.45: Impuls (Theorie)

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p} &= m \Delta \vec{v} \\ \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} &= m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \vec{a} = \vec{F}_{\text{res}}\end{aligned}\quad (5.6.8)$$

Impulssatz

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}\quad (5.6.9)$$

wobei $\Delta \vec{p}$ **Kraftstoss** genannt wird.

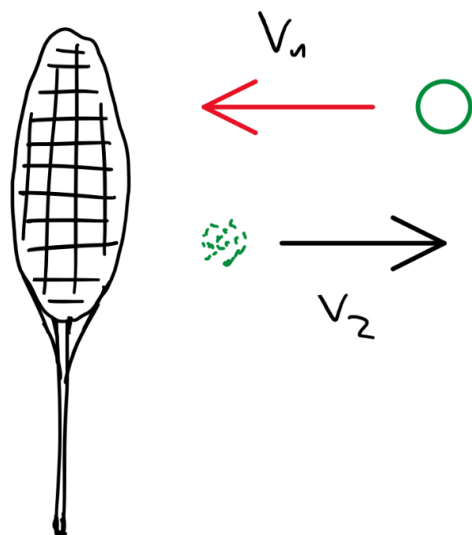
- $\Delta \vec{p}$ ist die Impulsänderung der Masse m
- Δt ist die Zeit, während welcher $\Delta \vec{p}$ passiert
- \vec{F}_{res} ist die Kraft, welche $\Delta \vec{p}$ erzwingen

Beispiele:

1. Abschlag Golf: Ein Golfball ($m = 45.9g$) wird beim Abschlag in $1ms$ auf $70m/s$ beschleunigt. Berechne via Impulssatz die mittlere Kraft, die auf den Goldball wirkt.

$$\begin{aligned}F_{\text{res}} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \\ &= \frac{p_2 - p_1}{\Delta t} \\ &= \frac{mv_2 - m \overset{0}{v_1}}{\Delta t} \\ &= \frac{mv_2}{\Delta t} \\ &= \underline{\underline{3213N}}\end{aligned}\quad (5.6.10)$$

2. Tennis: Ein Tennisball ($m = 57g$) braust mit $30m/s$ heran und wird so retourniert, dass er mit $20m/s$ zurückfliegt. Kontaktzeit Ball-Racket ist $8ms$. Wie gross ist die Kraft auf den Schläger?

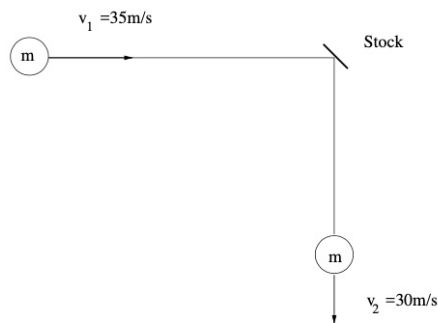


$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{\text{res}} &= \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \\
 &= \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} \\
 &= \frac{m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{t} \\
 &= \underline{\underline{356.25N}}
 \end{aligned}
 \tag{5.6.11}$$

Kraft auf Schläger: -356.25N

Skizze 5.46: Impuls (Beispiel)

3. Hockey: Der Torwart lenkt den mit $35m/s$ heranfliegenden Puck ($m = 150g$) so um 90° zur Seite, dass er mit $30m/s$ wegfliegt. Kontaktzeit $10ms$. Bestimme die Kraft auf den Puck.



Skizze 5.47: Impuls (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{\text{res}} &= \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \\
 &= \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} \\
 &= \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} \\
 &= \frac{m}{\Delta t} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\
 &= \frac{m}{\Delta t} \left[\begin{pmatrix} v_{1,x} \\ v_{1,y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{2,x} \\ v_{2,y} \end{pmatrix} \right] \\
 &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -525\text{N} \\ -450\text{N} \end{pmatrix}}}
 \end{aligned}
 \tag{5.6.12}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\text{res}} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \\
 &= \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{t} \\
 &= \underline{\underline{691.47\text{N}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'_{\text{res}} &= \arctan \left(\frac{F_{\text{res}, y}}{F_{\text{res}, x}} \right) \\
 &= 40.6^\circ \\
 \phi_{\text{res}} &= \phi'_{\text{res}} + 180^\circ \\
 &= \underline{\underline{220.6^\circ}}
 \end{aligned}$$

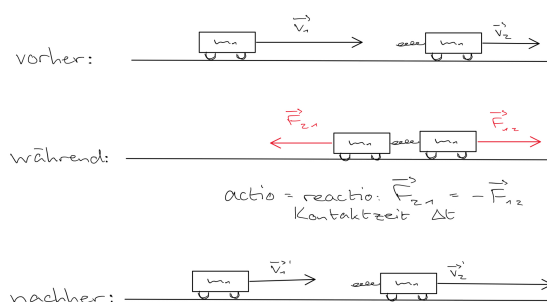
Experiment - Kugel gegen Block:

$$\begin{aligned}
 mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \quad \sqrt{2gh} = 1.17\text{m/s} \\
 \vec{F}_{\text{res}} &= \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{0.137(1.17\text{m/s} - (-1.17\text{m/s}))}{0.000134\text{s}} \\
 &= \underline{\underline{2392.39\text{N}}}
 \end{aligned}
 \tag{5.6.13}$$

5.6.3 Die Erhaltung des Impulses

Satz: Der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System bleibt stets erhalten (**Impulserhaltungssatz**).

Beweis: Zusammenstoss zweier Wagen



Skizze 5.48: Zusammenstoss zweier Wagen - Impulserhaltungssatz

Während des Stosses erfährt Wagen 1 die Impulsänderung...

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_{21} \cdot \Delta t \quad (5.6.14)$$

... und Wagen 2 die Impulsänderung.

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_{12} \cdot \Delta t \quad (5.6.15)$$

Gesamtimpuls vorher: $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

Gesamtimpuls nachher:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{tot}}' &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \Delta \vec{p}_2 \\ &= \vec{p}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta t + \vec{p}_2 + \vec{F}_{12} \Delta t \\ &= \vec{p}_1 + \color{red}{-\vec{F}_{12}} \cdot \Delta t + \vec{p}_2 + \vec{F}_{12} \Delta t \\ &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ &= \vec{p}_{\text{tot}} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (5.6.16)$$

Zusatzaufgabe: $m_1 = 1\text{kg}$, $v_1 = 4\text{m/s}$ nach links. $m_2 = 3\text{kg}$, $v_2 = 2\text{m/s}$, $\alpha_2 = 58^\circ$

Ges.: \vec{p}_{tot} , p_{tot} , α

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -0.82\text{Ns} \\ 5.09\text{Ns} \end{pmatrix}}}$$

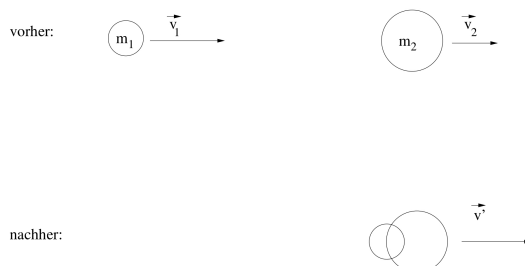
$$p_{\text{tot}} = \underline{\underline{5.15\text{Ns}}}$$

$$\alpha = -80.84^\circ + 180^\circ = \underline{\underline{99.16^\circ}}$$

5.6.4 Stösse

1. Der inelastische Stoss:

Ein Stoss heisst inelastisch, wenn die gesamte kinetische Energie nach dem Stoss kleiner ist als vor dem Stoss.



Skizze 5.49: Der inelastische Stoss

Ein Teil der ursprünglichen Bewegungsenergie (E_{kin}) wird in Deformationsenergie (E_{def}) umgewandelt und steht somit nicht mehr der Bewegung zur Verfügung.

geg.: $m_1, m_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$

ges.: \vec{v}', E_{def}

Lösung:

- Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{vor}} &= \vec{p}_{\text{nach}} \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}' \\ v' &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

- Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{vor}} &= E_{\text{nach}} \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + E_{\text{def}} \\ E_{\text{def}} &= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \cdot v'^2}{2} \\ &= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2}{2} \\ &= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{m_1^2 v_1^2 - 2m_1 \vec{v}_1 m_2 \vec{v}_2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2}}{2} \\ &= \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2 m_1 v_2^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2m_1 \vec{v}_1 m_2 \vec{v}_2 - m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} \\ &= \frac{m_1 m_2 \cdot (v_1^2 - 2\vec{v}_1 \vec{v}_2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)} \\ E_{\text{def}} &= \frac{m_1 m_2 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

Zahlenbeispiel: Eine Kugel ($m_1 = 2\text{kg}$) bewegt sich mit $v_1 = 4\text{m/s}$ nach rechts und stösst dort inelastisch eine zweite Kugel ($m_2 = 3\text{kg}$), welche mit 5m/s sich nach links bewegt.

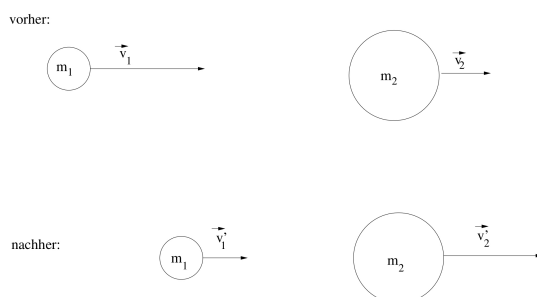
Bestimmt die Endgeschwindigkeit \vec{v}' des Klumpens und die Deformationsenergie E_{def} .

$$v' = \underline{\underline{-1.4\text{m/s}}}$$

$$E_{\text{def}} = \underline{\underline{48.6\text{J}}}$$

2. Der elastische (zentrale) Stoss:

Ein Stoss heisst elastisch, wenn keine Bewegungsenergie in (bleibende) Verformungsenergie umgewandelt wird, d.h. wenn $E_{\text{def}} = 0$. Es gilt also: $E_{\text{kin, nach}}$. Der Impuls bleibt sowieso erhalten. (Da wird nun den zentralen Stoss anschauen, bleibt das Problem eindimensional.)



Skizze 5.50: Der elastische (zentrale) Stoss

geg.: $m_1, m_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$

ges.: v_1', v_2'

Lösung:

- Energieerhaltung:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (5.6.19)$$

- Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (5.6.20)$$

Zwei Unbekannte, zwei Gleichungen \Rightarrow eindeutige Lösung.

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (5.6.21)$$

Beispiel: Geg.: $m_1 = m_2 = m, v_2 = 0, v_1 > 0$; Ges.: \vec{v}_1', \vec{v}_2'

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \underline{\underline{\vec{v}_1}} \quad (5.6.22)$$

Experiment - Pfeil (1) ($m = 0.0091kg$) gegen Block (2) ($M = 0.12075kg$):

$$\begin{aligned} h &= 0.74m - \sqrt{0.74^2 - 0.2^2} \\ &= 0.0275m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{pot, Block, vorher}} &= E_{\text{kin, beide, nachher}} \\ (M + m)gh &= \frac{1}{2}(M + m)v'^2 \\ v'_{\text{beide}} &= \sqrt{2gh} \\ &= 0.73m/s \end{aligned} \tag{5.6.23}$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m\vec{v}_1 + 0}{m + M} \\ v'(m + M) &= m\vec{v}_1 \\ \frac{v'(m + M)}{m} &= \vec{v}_1 \\ &= \underline{\underline{10.48m/s}} \end{aligned}$$

Beispiele:

- Ein Wagen (m_1) stösst mit der Geschwindigkeit \vec{v}_1 völlig elastisch auf den stehenden Wagen $m_2 = 14'000kg$. Nach dem Stoss bewegen sich beide Wagen nach rechts und zwar $\vec{v}_1' = 0.2m/s$ bzw. $\vec{v}_2' = 2m/s$.

Wir bestimmten die Daten von Wagen 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2' &= \frac{(m_2 - m_1) \cdot 0 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{5.6.24}$$

Löse beide Gleichungen nach \vec{v}_1 auf und setze gleich:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{\vec{v}_1'(m_1 + m_2)}{m_1 - m_2} = \frac{\vec{v}_2'(m_1 + m_2)}{2m_1} \\ &\Downarrow \\ \vec{v}_1' \cdot 2m_1 &= \vec{v}_2'(m_1 - m_2) = m_1\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2' \\ m_1(2\vec{v}_1' - \vec{v}_2') &= -m_2\vec{v}_2' \\ m_1 &= \frac{-m_2\vec{v}_2'}{2\vec{v}_1' - \vec{v}_2'} \\ &= \underline{\underline{17'500kg}} \end{aligned} \tag{5.6.25}$$

oben einsetzen: $\vec{v}_1 = \underline{\underline{1.8m/s}}$

- Newtonpendel:

Lenkt man beim (perfekten) Newtonpendel eine bestimmte Anzahl Kugeln links aus, dann scheren gleich viele rechts aus.

Beweis: Es werden n Kugeln ausgelenkt, und es scheren k Kugeln auf der anderen Seite aus.

$$\begin{array}{l} \text{Energieerhaltung: } \left| \frac{1}{2}nmv_1^2 = \frac{1}{2}kmv_2'^2 \right| \text{ I} \\ \text{Impulserhaltung: } \left| nmv_1 = kmv_2' \right| \text{ II} \end{array}$$

Aus Gleichung II $\Rightarrow v_2' = \frac{nv_1}{k}$
 \Rightarrow in I einsetzen:

$$\begin{aligned} nv_1^2 &= k \left(\frac{nv_1}{k} \right)^2 \\ nv_1^2 &= \frac{kn^2v_1^2}{k^2} & (5.6.26) \\ 1 &= \frac{n}{k} \\ k &= n \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aufgaben:

- Der Kern eines Atoms besitzt die Masse $m = 3.80 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ und befindet sich in Ruhe. Der Atomkern ist radioaktiv und emittiert plötzlich ein Teilchen der Masse $m_1 = 6.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ und der Geschwindigkeit $v_1 = 1.5 \cdot 10^7 \text{ m/s}$. Bestimme die Rückstoss­geschwindigkeit des verbliebenen Stückes des Atomkerns!

Der verbleibende Teil hat die Masse $m_2 = m - m_1 = 3.734 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$.

Impulserhaltung: $0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$.

Gesucht ist $\vec{v}_2 = \frac{-m_1\vec{v}_1}{m_2} = \underline{\underline{-265'131.23 \text{ m/s}}}$

- Zwei Eisenbahnwagen haben gleiche Massen (5 Tonnen). Sie rollen in der gleichen Richtung auf einem Gleis. Der vordere hat eine Geschwindigkeit von 30 km/h der hintere eine solche von 50 km/h .

Wagen 1 hat die Geschwindigkeit 13.89 m/s , Wagen 2 8.33 m/s . Das ganze Problem ist ein­dimensional in die gleiche Richtung, also kann auf die vektorielle Darstellung verzichtet werden.

- Welche Geschwindigkeiten haben die beiden Wagen nach einem vollkommenen elastischen Stoss?

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2' &= \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (5.6.27)$$

Da die Massen identisch sind, erhält man: $v_1' = 8.33 \text{ m/s}$ und $v_2' = \underline{\underline{13.89 \text{ m/s}}}$.

D.h. die Geschwindigkeiten werden gerade „ausgetauscht“.

- Welche Geschwindigkeit haben die beiden Wagen, wenn sie nach dem Stoss miteinander verkoppelt werden?

Es gilt nur die Impulserhaltung: $mv_1 + mv_2 = 2mv'$ also, $v' = \frac{v_1+v_2}{2} = \underline{\underline{11.11 \text{ m/s}}}$.

- Welche kinetische Energie verliert das System der beiden Wagen in der letzten Teilaufgabe?

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= E_{\text{kin}} - E'_{\text{kin}} \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}2mv'^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 - 2v'^2) \\ &= \underline{\underline{38'580 \text{ J}}} \end{aligned} \quad (5.6.28)$$

Oder aus dem Formelbuch: $E_{\text{def}} = \frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

3. Um die Geschwindigkeit v_0 eines Geschosses der Masse $m_0 = 4g$ zu bestimmen, schießt man es horizontal in einen Holzklötz der Masse $m_1 = 800g$, der auf einem Waagrechten Tisch liegt und misst die Verschiebung $d = 0.4m$ des Klötzes. (Das Geschoss bleibt im Holzklötz stecken!). Der Reibungskoeffizient zwischen Klötz und Tisch beträgt 0.3. Wie gross ist v_0 ?
Das ganze Problem ist eindimensional in die gleiche Richtung, also kann auf die vektorielle Darstellung verzichtet werden. Der Klötz mit Schuss hat nach dem Einschuss die Geschwindigkeit $v' = \frac{m_0 v_0 + m_1 v_1}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1}$. Danach wird Reibungsarbeit verrichtet, um die kinetische Energie umzuwandeln in Wärmeenergie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_0 + m_1)v'^2 &= \frac{1}{2}(m_0 + m_1) \left(\frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1} \right)^2 = \text{kinetische Energie} \\ F_R \cdot d &= F_N \cdot \mu \cdot d = (m_0 + m_1)g \cdot \mu \cdot d = \text{Reibungsarbeit} \\ \frac{1}{2}(m_0 + m_1) \left(\frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1} \right)^2 &= (m_0 + m_1)g\mu \cdot d \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1} \right)^2 &= g \cdot \mu \cdot d \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \mu \cdot d (m_0 + m_1)^2}{m_0^2}} = \underline{\underline{308.42m/s}} \end{aligned} \quad (5.6.29)$$

4. Rutherford beobachtete, dass die kinetische Energie von reflektierten α -Teilchen nach einem zentralen Stoss (vollkommen elastisch) gegen Kupferkerne noch 78% der Anfangsenergie beträgt. Welchen angenäherten Wert konnte er daraus für die Atommasse der α -Teilchen berechnen? (Atommasse von Cu: $m_2 = 63.6$ atomare Masseneinheiten (u). $1u = 1.660571 \cdot 10^{-27}kg$).

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \\ v'_1 &= -\frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{negativ, da reflektiert} \\ m_1 &= \frac{m_2(v_1 - v'_1)}{v'_1 + v_1} \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

Information der abgenommenen kinetischen Energie des reflektierten α -Teilchens:

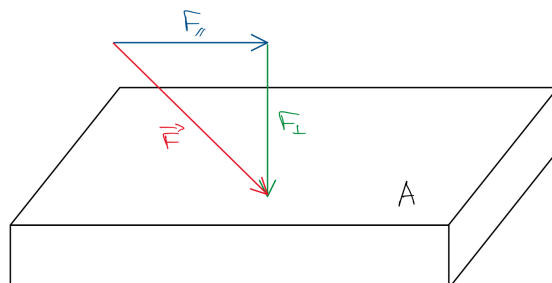
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \cdot 0.78 &= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 \\ v'_1 &= v_1 \sqrt{0.78} \\ m_1 &= \frac{m_2(v_1 - v_1 \sqrt{0.78})}{v_1 \sqrt{0.78} + v_1} = \frac{m_2(1 - \sqrt{0.78})}{\sqrt{0.78} + 1} = 0.062 \cdot m_2 \end{aligned} \quad (5.6.31)$$

Als ist $m_1 = 0.062 \cdot 63.6u = \underline{\underline{3.945u}} = \underline{\underline{6.55 \cdot 10^{-27}kg}}$

III Hydrostatik

In diesem Teil geht es um Flüssigkeiten und Gase, also Stoffe, welche keine eigene Form in Sinne eines Festkörpers haben. Man spricht von **Fluiden**. Der Zusatz „statik“ verdeutlicht, dass Fluide nicht fließen! Würden die Fluide fließen, spräche man von Hydrodynamik.

6 Der Druck p



Skizze 6.1: Druck (Theorie)

Es wirke \vec{F} auf die Fläche A , dann ist der Druck gegeben durch:

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (6.1)$$

Die SI-Einheit des Drucks ist das Pascal:

$$[p] = \left[\frac{F}{A} \right] = \frac{N}{m^2} = Pa \text{ (Pascal)}$$

Bemerkung: Der Druck hat keine Richtung, ist also ein Skalar. Die Kraft hingegen, welche den Druck erzeugt, hat sehr wohl eine Richtung!

Verschiedene Druckeinheiten:

$$1Pa = 1N/m^2$$

SI-Einheit

$$1hPa = 100Pa \text{ (Hektopascal)}$$

Meteorologie

$$1bar = 10^5 Pa$$

Umgangssprache

$$1at = 101'325Pa \text{ (Atmosphäre)}$$

Normaldruck

$$1Torr = \frac{1}{760}at \text{ (Torricelli)}$$

$$1mmHg = 1Torr \text{ (mm Quecksilber)}$$

Medizin

$$natü = (n + 1)at \text{ (Atmosphärenüberdruck)}$$

Beispiele - Berechne den Bodendruck:

1. Mann, $m = 80kg$, $A = 2 \cdot 10cm \cdot 25cm$

$$p = \underline{\underline{1.57 \cdot 10^4 Pa}}$$

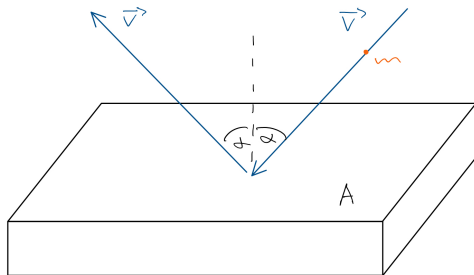
2. Bagger, $m = 50t$, $A = 2 \cdot 0.8m \cdot 4m$

$$p = \underline{\underline{7.66 \cdot 10^4 Pa}}$$

3. Frau, $m = 60kg$, $A = 1cm^2$ (Bleistiftabsatz)

$$p = \underline{\underline{5.89 \cdot 10^6 Pa}}$$

Zusatzaufgabe: Eine Kugel der Masse $m = 10g$ wird mit der Geschwindigkeit $v = 4m/s$ unter einem Winkel $\alpha = 40^\circ$ auf eine Platte der Fläche $A = 10cm^2$ geschossen. Dort wird sie vollkommen elastisch innert $\Delta t = 0.01s$ reflektiert. Bestimme den Druck unter der Platte.



Skizze 6.2: Druck (Beispiel)

$$v_{\perp} = v \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \\
 &= \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} \\
 &= \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t} \\
 &= \frac{m(v_2 - (-v_1))}{\Delta t} \\
 &= \frac{m \cdot 2v_{\perp}}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{F}{A} \\
 &= \underline{\underline{6128.36Pa}}
 \end{aligned}$$

6.1 Stempel- & Schweredruck



Skizze 6.3: Druck (Theorie)

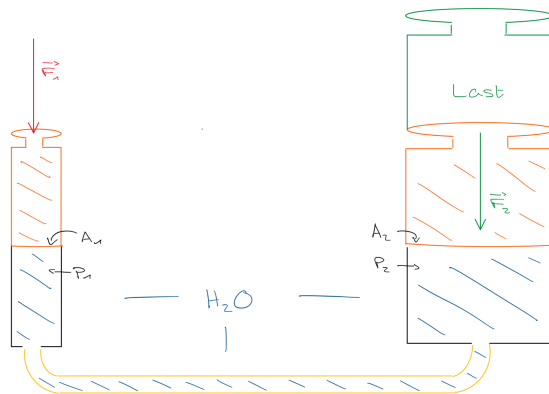
Der Druck p wird verursacht durch:

- Gewicht (Schwerkraft) des Wassers \rightarrow **Schweredruck**
- Kraft des Stempels $\vec{F}_S \rightarrow$ **Stempeldruck**

Exkurs - Geschwindigkeit der Druckausbreitung
Die Geschwindigkeit der Druckausbreitung entspricht der Schallgeschwindigkeit.

6.1.1 Stempeldruck

... am Beispiel der hydraulischen Presse:



Skizze 6.4: Stempeldruck (Theorie)

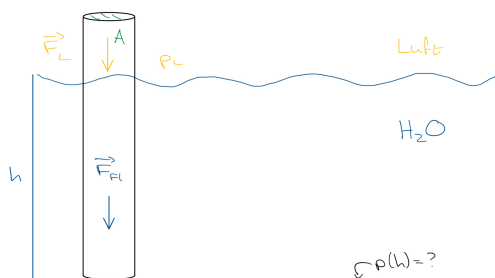
Die Last auf der rechten Seite erzeugt einen Druck $p_2 = \frac{F_2}{A_2}$. Dieser Druck breitet sich aus, sodass der Druck p_1 auf der linken Seite gleich gross wird: $\frac{F_2}{A_2} = p_2 = p_1 = \frac{F_1}{A_1}$. Daraus folgt das Gesetz für die hydraulische Presse:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{6.1.1}$$

Beispiel: Last = 100kg, Fläche des Laststempels $A_2 = 100\text{cm}^2$, Fläche des Kraftstempels $A_1 = 1\text{cm}^2$, Kraft $F_1 = ?$.

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{A_1} &= \frac{F_2}{A_2} \\ \Rightarrow F_1 &= F_2 \frac{A_1}{A_2} \\ &= 100\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot \frac{1\text{cm}^2}{100\text{cm}^2} \\ &= \underline{\underline{9.81\text{N}}} \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

6.1.2 Schweredruck in Flüssigkeit



Gesucht ist der Druck in der Tauchtiefe h , also $p(h)$. Auf die Fläche A am Boden des Bassins drückt die Kraft \vec{F}_L der Luft, sowie die Kraft \vec{F}_{Fl} der Flüssigkeit (hier Wasser).

Skizze 6.5: Schweredruck (Theorie)

$$p(h) = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{F_L + F_{Fl}}{A} = \underbrace{\frac{F_L}{A}}_{p_L} + \frac{F_{Fl}}{A} = p_L + \frac{m_{Fl} \cdot g}{A} = p_L + \frac{A \cdot h \cdot \rho \cdot g}{A} = p_L + \rho_{Fl}gh \tag{6.1.3}$$

Somit ist der Druck der Tauchtiefe h einer Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} bei äusseren Luftdruck p_L :

$$p(h) = p_L + \rho_{Fl}gh \tag{6.1.4}$$

6.1.3 Der Luftdruck

Der Luft nimmt mit der Höhe h über Meer ab. Diese Abnahme wird durch die sog. **barometrische Höhenformel** beschrieben:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}} \tag{6.1.5}$$

mit:

- $p(h)$ den Luftdruck in der Höhe über Meer in Pa
- p_0 dem Normaldruck auf Meereshöhe mit dem Wert $p_0 = 101'325 Pa$
- ρ_0 der Luftdichte bei Normalbedingungen ($p_0 = 101'325 Pa$ und $T_0 = 0^\circ C$) mit dem Wert $\rho_0 = 1.293 kg/m^3$
- g der Erdbeschleunigung $g = 9.81 m/s^2$
- h der Höhe über Meer in m

Exkurs - Eulerfunktion

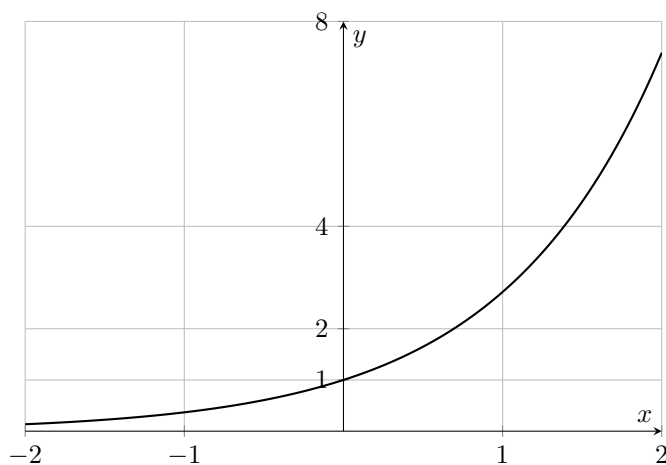


Abbildung 6.1.1: Graph der eulerschen Funktion $y = e^x$.

Zusatzaufgabe: h , wenn $p(h) = \frac{p_0}{2}$

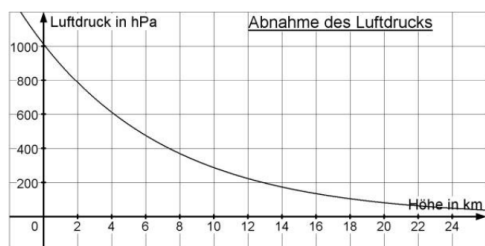


Abbildung 6.1.2: Abnahme des Luftdrucks

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{2} &= p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}} \\ \frac{1}{2} &= e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}} \\ \frac{-\rho_0 g h}{p_0} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ h &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot p_0}{-\rho g} \\ &= \underline{\underline{5537m}} \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Aufgaben:

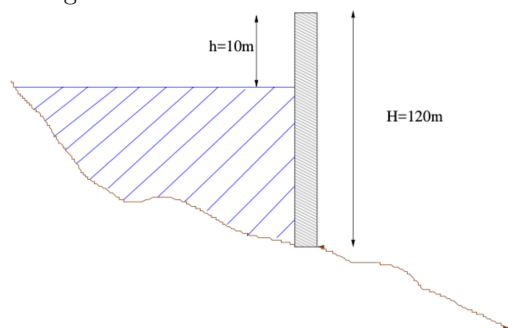
1. Ein Flugzeug fliegt in $12'000m$ Höhe. Der Innendruck beträgt $p_i = 0.9 \cdot 10^5 Pa$. Welche Kraft muss ein Fenster $A = 900cm^2$ aushalten?

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{F}{A} \\
 F &= p \cdot A \\
 &= A(p_a - p_i) \\
 &= A(p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}} - p_i) \\
 &= \underline{\underline{6069.72N}}
 \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

2. Welche Kraft muss ein Fenster einer Tauchkugel (Piccard) in 200m Tiefe ertragen? ($A = 0.4m^2$, $p_i = p_L$).

$$\begin{aligned}
 p(h) &= p_L + \rho_F l g h \\
 F &= A \cdot p \\
 &= A(p - p_i) \\
 &= A(\rho_F l g h) \\
 &= \underline{\underline{7.83 \cdot 10^5 N}}
 \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

3. Wie gross ist die resultierende Kraft auf eine Staumauer von 300m Länge?



$$\begin{aligned}
 p_S &= \rho_W g h \\
 &= \rho_W g \frac{h}{2} \\
 &= 1000kg/m^3 \cdot 9.81m/s^2 \cdot 55m \tag{6.1.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= p_S \cdot A \\
 &= \underline{\underline{1.78 \cdot 10^{10} N}}
 \end{aligned}$$

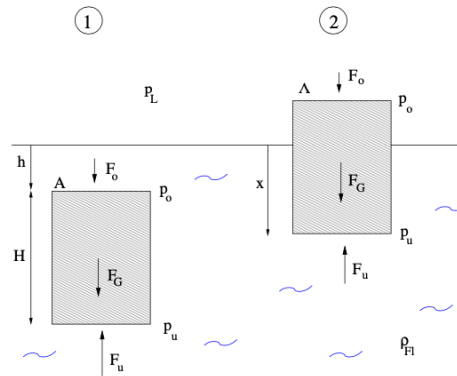
Skizze 6.6: Luftdruck (Beispiel)

Exkurs - Wetterkarte (Praktikant)
geg.: $p(0)$ [Wetterkarte]

$$\begin{aligned}
 p(h) &= p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}} \\
 p(h) &= p(0) \cdot e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}} \\
 p(0) &= p(h) \cdot e^{\frac{\rho_0 g h}{p_0}}
 \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

6.2 Der statische Auftrieb

Ist ein Körper ganz oder teilweise in einem Fluidum (z.B. Wasser) eingetaucht, so erfährt er eine **Auftriebskraft** \vec{F}_A .



Skizze 6.7: Statischer Auftrieb (Theorie)

In beiden Fällen (1. & 2.) ist $p_u > p_o$ und somit auch $F_u > F_o$. Die Resultierende aus \vec{F}_u und \vec{F}_o ist dann die Auftriebskraft \vec{F}_A . Alle seitlichen Kräfte heben sich auf!

1. Fall:

$$\begin{aligned}
 F_A &= F_u - F_o = p_u \cdot A - p_o \cdot A \\
 &= [\rho_{F1}g(H + h) + p_L] \cdot A - [\rho_{F1}gh + p_L] \cdot A \\
 &= \rho_{F1}gHA \\
 &= \rho_{F1}gV = mg = F_G
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned}
 F_A &= F_u - F_o = p_u \cdot A - p_o \cdot A = (\rho_{F1}gx + p_L)A - p_L \cdot A \\
 &= \rho_{F1}gx A \\
 &= \rho_{F1}gV_v
 \end{aligned}
 \tag{6.2.2}$$

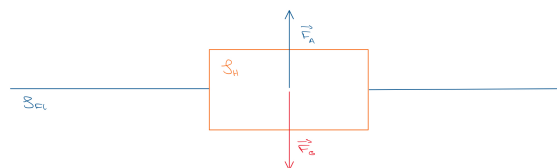
Die Auftriebskraft im Fluidum der Dichte ρ_{F1} :

$$F_A = \rho_{F1}gV_v
 \tag{6.2.3}$$

... wobei V_v das verdrängte Volumen ist.

Beispiele:

- Ein Holzfluss ($4m \times 2m \times 0.3m$) schwimmt $20cm$ tief eingetaucht in Wasser der Dichte $1000kg/m^3$. Bestimme die Dichte des Holzes und die maximale Last, welche das Floss noch tragen könnte.



Skizze 6.8: Statischer Auftrieb (Beispiel)

$$\begin{aligned}
 F_G &= F_A \\
 mg &= \rho_{F1} g V_v \\
 \rho_H V &= \rho_{F1} V_v \\
 \rho_H &= \rho_{F1} \frac{V_v}{V} \\
 &= 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4m \cdot 2m \cdot 0.2m}{4m \cdot 2m \cdot 0.3m} \\
 &= \underline{\underline{666\frac{2}{3} \text{ kg/m}^3}}
 \end{aligned}$$

(6.2.4)

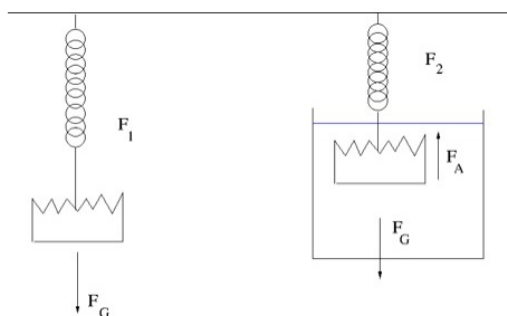
$$\begin{aligned}
 F_G &= F_A \\
 mg + m'g &= \rho_{F1} g V_v \\
 m' &= \rho_{F1} V_v - m \\
 &= \rho_{F1} V - m \\
 &= \rho_{F1} V - \rho_H V \\
 &= V(\rho_{F1} - \rho_H) \\
 &= 4m \cdot 2m \cdot 0.3m (1000 \text{ kg/m}^3 - 666\frac{2}{3} \text{ kg/m}^3) \\
 &= \underline{\underline{800 \text{ kg}}}
 \end{aligned}$$

2. Persönliche Auftriebskraft in Luft

$$\begin{aligned}
 F_A &= \rho_L g V_v \\
 &= \rho_L g \frac{m}{\rho} \\
 &= 1.293 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{80 \text{ kg}}{1000 \text{ kg/m}^3} \\
 &= \underline{\underline{1.02 \text{ N}}}
 \end{aligned}$$

(6.2.5)

3. (Aufgabe) Die vermeintliche goldene Krone soll auf ihre Reinheit untersucht werden, d.h. wir bestimmen ihre Dichte. Dazu wird sie mit einer Federwaage gewogen. Man erhält eine Kraft von $F_1 = 0.64 \text{ N}$. Danach wird sie erneut gewogen, jedoch während sie im Wasser eingetaucht ist. Man erhält eine Kraft $F_2 = 0.4 \text{ N}$. Die zweite Kraft ist geringer, da die Auftriebskraft F_A entgegen wirkt. Bestimme die Dichte der Krone.



Skizze 6.9: Statischer Auftrieb (Beispiel)

$$F_1 = 0.64N$$

$$F_2 = 0.4N$$

$$\begin{aligned} F_1 &= mg = V\rho_x g \Rightarrow V = \frac{F_1}{\rho_x g} \\ F_2 &= F_1 - F_A = F_1 - \rho_W g V \Rightarrow V = \frac{F_1 - F_2}{\rho_W g} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{\rho_x g} &= \frac{F_1 - F_2}{\rho_W g} \\ \rho_x &= \frac{F_1 \rho_W}{F_1 - F_2} \\ &= \underline{\underline{2'661.33kg/m^3}} \end{aligned}$$

IV Wärmelehre

7 Die Temperatur T

Neben Volumen, Masse, Impuls, ... ist die Temperatur eine weitere physikalische Grösse, um den Zustand eines Körpers zu beschreiben. Die Temperatur ist ein Skalar. Man misst die Temperatur mit einem Thermometer. Es gibt verschiedene Einheiten!

7.1 Temperaturskalen

- Celsius-Skala [$^{\circ}\text{C}$.] nach dem schwedischen Astronomen Andres Celcius. Sie basiert auf der Siede- und Schmelztemperatur von Wasser.

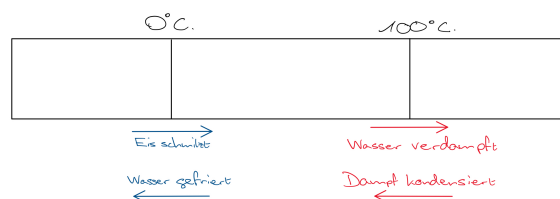


Abbildung 7.1.1: Celsius-Skala

- Fahrenheit-Skala [$^{\circ}\text{F}$.] nach Daniel Gabriel Fahrenheit. Sie basiert auf der Schmelztemperatur von Eis (32°F ., 0°C .) und der „normalen Temperatur eines gesunden Menschen“ (98.6°F ., 37°C .).
- Kelvin-Skala [K] nach William Thomson (Lord Kelvin). Sie ist die SI-Einheit der Temperatur. Null Kelvin ist der absolute Nullpunkt, d.h. es gibt nichts Kälteres. Bei dieser Temperatur kommt die BROWN'sche Molekularbewegung zum Erliegen. 0 Kelvin entsprechen -273.15°C . Die Skalenbreite ist dieselbe wie jene der Celsius-Skala.

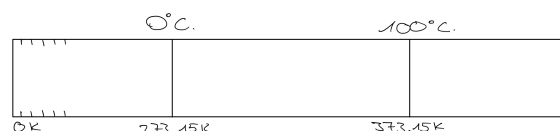


Abbildung 7.1.2: Kelvin-Skala

7.2 Umrechnung

- $x^{\circ}\text{F}$. $\rightarrow y^{\circ}\text{C}$. $\Rightarrow y = (x - 32) \cdot \frac{5}{9}$
Bsp. 100°F . $\hat{=}$ 37.78°C .
- $y^{\circ}\text{C}$. $\rightarrow z\text{K}$ $\Rightarrow z = y + 273.15\text{K}$
Bsp. 20°C . $\hat{=}$ 293.15K

7.3 Thermische Ausdehnung

Wenn wir einen Körper erwärmen (Energie zuführen), dann...

- ...steigt evtl. seine Temperatur.
- ...ändert sich evtl. sein Volumen.
- ...ändert sich evtl. seine Farbe.
- ...ändert sich evtl. seine Phase (Aggregatzustand)

7.3.1 Längenausdehnung

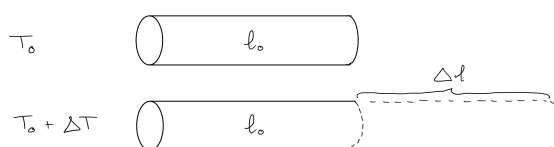
Experiment: Wir spannen ein 1m-langes Messingrohr ein und leiten heissen Dampf durch das Rohr. Wir messen eine Längenänderung von ca. 1.45mm. Diese Längenänderung ist proportional zur Temperaturänderung ΔT und zur Anfangslänge ℓ_0 .

Es gilt:

$$\Delta \ell = \alpha \cdot \ell_0 \cdot \Delta T \quad (7.3.1)$$

Wobei α **Längenausdehnungskoeffizient** heisst und materialabhängig ist.

Experiment: Wir bestimmen den Längenausdehnungskoeffizienten von Aluminium. Dazu erhitzen wir einen $\ell_0 = 1m$ langen Aluminiumstab um ΔT .



Skizze 7.1: Thermische Ausdehnung (Beispiel)

Wir messen: $\ell_0 = 1000mm$

$T_0 = 20.4^\circ C$.

$\Delta T = 72K$

$\Delta \ell = 1.75mm$

Aus $\Delta \ell = \alpha_{Al} \cdot \ell_0 \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \alpha_{Al} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0 \cdot \Delta T} = \frac{1.75mm}{1000mm \cdot 72K} \quad (7.3.2)$$

$$= \underline{\underline{2.43 \cdot 10^{-5} K^{-1}}}$$

Tabellenwert $\hat{=} \underline{\underline{2.38 \cdot 10^{-5} K^{-1}}}$

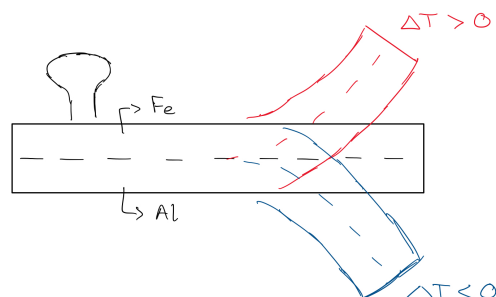
Beispiel: Eine 80m lange Eisenbrücke ist Temperaturen im Bereich von $-30^\circ C$. bis $50^\circ C$. ausgesetzt. Wie gross ist die maximale Längenänderung der Brücken?

$$\Delta \ell = \alpha_{Fe} \cdot \ell_0 \cdot \Delta T$$

$$= 12 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 80m \cdot 80K \quad (7.3.3)$$

$$= 0.0768m \approx \underline{\underline{7.68m}}$$

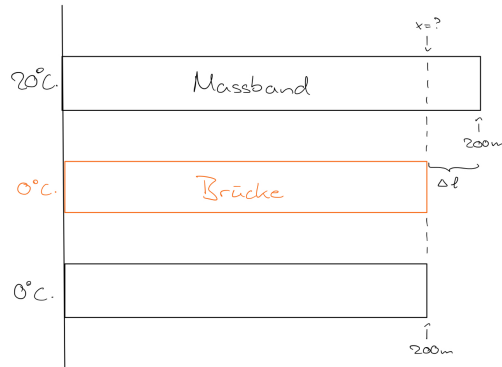
Experiment: Bi-Metallstreifen; oben Eisen, unten Aluminium



Aluminium dehnt sich doppelt so stark aus wie Eisen \Rightarrow Krümmung.

Skizze 7.2: Thermische Ausdehnung (Experiment)

Beispiel: Ein Messband aus Stahl ist bei 20°C. geeicht (misst dann richtig). Bei 0°C. wird die Länge einer Brücke gemessen. Man liest 200m ab. Wie lange ist die Brücke in Wirklichkeit?



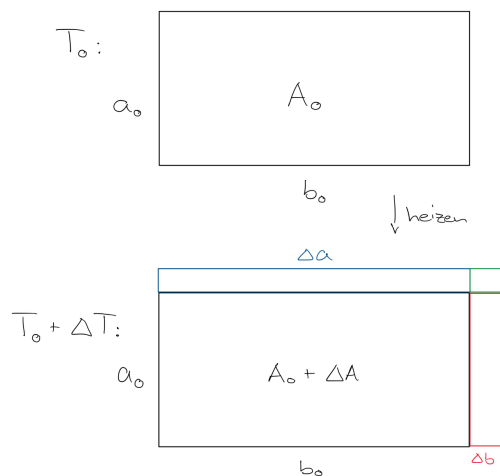
$$\begin{aligned} \Delta l &= \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T \\ &= 11 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 200m \cdot 20K \quad (7.3.4) \\ &= 0.044m \end{aligned}$$

Richtige Länge $x = l_0 - \Delta l = 200m - 0.044m = \underline{\underline{199.96m}}$.

Skizze 7.3: Thermische Ausdehnung (Beispiel)

7.3.2 Flächenausdehnung

Hier geht es um die Ausdehnung von (2-dimensional) aus festen Stoffen:



$$\begin{aligned} \Delta A &= (a_0 + \Delta a)(b_0 + \Delta b) - A_0 \\ &= a_0 b_0 + \Delta a b_0 + a_0 \Delta b + \Delta b \Delta a - a_0 b_0 \\ &= \alpha a_0 \Delta T \cdot b_0 + a_0 \cdot \alpha b_0 \Delta T + \alpha b_0 \Delta T \cdot \alpha a_0 \Delta T \\ &= 2 \cdot \alpha a_0 b_0 \Delta T + \underbrace{\alpha^2 a_0 b_0 (\Delta T)^2}_{\approx 0} \\ &\approx 2\alpha \underbrace{a_0 b_0}_{A_0} \Delta T \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Skizze 7.4: Thermische Ausdehnung (Theorie)

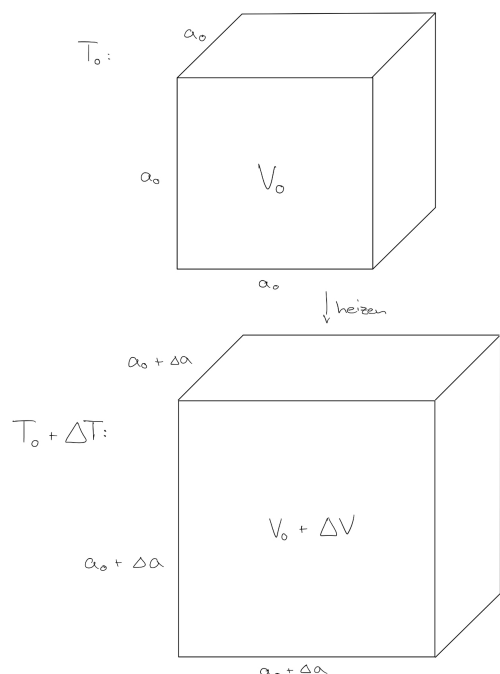
Flächenänderung:

$$\Delta A \approx 2\alpha A_0 \Delta T \quad (7.3.6)$$

Wobei α immer noch der Längenausdehnungskoeffizient ist!

7.3.3 Volumenänderung

Feste Stoffe:



$$\begin{aligned}
 \Delta V &= (a_0 + \Delta a)^3 - a_0^3 \\
 &= a_0^3 + 3a_0^2\Delta a + \underbrace{3a_0\Delta a^2}_{\approx 0} + \underbrace{\Delta a^3}_{\approx 0} - a_0^3 \\
 &\approx 3a_0^2\Delta a \\
 &= 3a_0^2\alpha a_0\Delta T \\
 &= 3a_0^3\alpha\Delta T
 \end{aligned}
 \tag{7.3.7}$$

Skizze 7.5: Thermische Ausdehnung (Theorie)

Volumenänderung eines Feststoffes:

$$\Delta V \approx 3\alpha V_0 \Delta T \tag{7.3.8}$$

Wobei α immer nach der Längenausdehnungskoeffizient ist.**Aufgabe:** Bestimme die Dichte eines Festkörpers als Funktion der Temperaturänderung ΔT relativ zur Normaltemperatur $\rho(\Delta T)$.

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0 + \Delta V} \\
 &= \frac{m}{V_0 + 3\alpha V_0 \Delta T} \\
 &= \frac{m}{V_0(1 + 3\alpha \Delta T)} \\
 &= \frac{\rho}{1 + 3\alpha \Delta T}
 \end{aligned}
 \tag{7.3.9}$$

Dichte eines Festkörpers als Funktion der Temperaturänderung:

$$\rho(\Delta T) = \frac{\rho}{1 + 3\alpha \Delta T} \tag{7.3.10}$$

Beispiel: Dichte von Eisen bei -35°C . (Lösung: 7875.59kg/m^3)

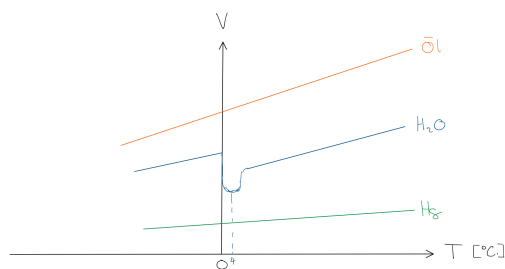
$$\rho(-55\text{K}) = \frac{7860\text{kg/m}^3}{1 + 3 \cdot 12 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1} \cdot (-55\text{K})} \tag{7.3.11}$$

Flüssige Stoffe:

Flüssigkeiten dehnen sich stärker aus als Festkörper. Die Volumenausdehnung von Flüssigkeiten wird durch folgendes Gesetz geschrieben:

$$\Delta V = \gamma V_0 \Delta T \quad (7.3.12)$$

mit γ dem Volumenausdehnungskoeffizienten.



Die Ausdehnung von Flüssigkeiten verläuft linear mit ΔT , ausser Wasser. Dichte-Anomalie von Wasser: Wasser hat bei 4°C seine höchste Dichte.

Skizze 7.6: Thermische Ausdehnung (Theorie)

Aufgabe: Bei -5°C wird ein 60-Liter Eisenbehälter randvoll mit Heizöl gefüllt. Die Temperatur steigt auf 15°C . Was passiert? ($\gamma_{\text{Öl}} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$)

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{Öl}} &= \gamma_{\text{Öl}} V_0 \Delta T \\ &= 0.9 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot 60 \text{l} \cdot 20^\circ\text{C} \\ &= 1.08 \text{l} \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{Fe}} &= 3\alpha_{\text{Fe}} V_0 \Delta T \\ &= 3 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1} \cdot 60 \text{l} \cdot 20 \text{K} \\ &= 0.04 \text{l} \end{aligned}$$

Netto laufen $\Delta V_{\text{Öl}} - \Delta V_{\text{Fe}} = \underline{\underline{1.04 \text{l}}}$ Öl aus.

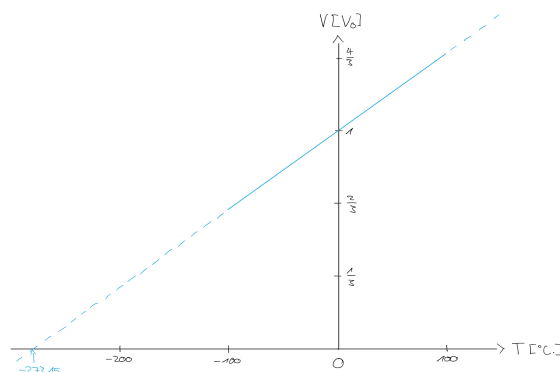
7.3.4 Volumenausdehnung bei Gasen

Makroskopische Grösse bei einem Gas:

- Volumen V
- Druck p
- Temperatur T
- Masse m
- Gasmenge n (# mol)
- (Gassorte)

Alle diese Grössen sind veränderbar. Wir untersuchen einen Fall, bei welchem nur Temperatur und Volumen variiert werden können.

(Experiment:) Beim Messen eines Gasvolumens in Abhängigkeit der Temperatur stellt sich immer folgender Zusammenhang ein:



Skizze 7.7: Thermische Ausdehnung (Experiment)

Pro $100K$ Temperaturänderung (bei $0^\circ C$), ändert sich das Volumen um etwa $1/3$, genauer um $\frac{1}{2.7315}$. Pro $1K$ Temperaturänderung ist die Volumenänderung 100mal kleiner, also $\frac{1}{273.15}$. Dies ist der Volumenausdehnungskoeffizient aller Gase (bei $0^\circ C$).

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{273.15K} \cdot V_0 \cdot \Delta T && \text{bei } 0^\circ C. \\ \Delta V &= \frac{1}{T} \cdot V_0 \cdot \Delta T && \text{bei der Temperatur } T \text{ (allgemein)}\end{aligned}\quad (7.3.14)$$

Weil Volumina ≤ 0 nicht möglich sind, „verbieten“ wir Temperaturen unter $\leq 0K$.

Aufgaben:

- Ein Gas hat $0^\circ C$ ein Volumen von $80l$. Bestimme sein Volumen $90^\circ C$.

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{T} \cdot V_0 \cdot \Delta T \\ &= \frac{1}{273.15K} \cdot 80l \cdot 90K \\ &= 26.36l\end{aligned}\quad (7.3.15)$$

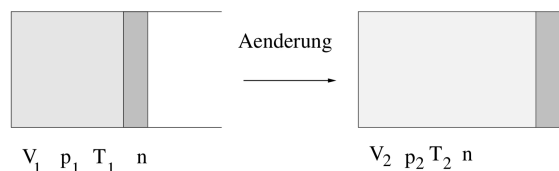
$$V_0 + \Delta V = \underline{\underline{106.36l}}$$

- Ein Gas verdoppelt sein Volumen beim Erwärmen von $0^\circ C$ auf T . Bestimme T .

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{T} \cdot \Delta V_0 \cdot \Delta T \\ V_0 &= \frac{1}{T} \cdot V_0 \cdot \Delta T \\ 1 &= \frac{1}{T} \cdot \Delta T \\ T &= \Delta T \\ &= \underline{\underline{273.15K}}\end{aligned}\quad (7.3.16)$$

8 Das ideale Gas

Man hat eine bestimmte Menge Gas (n Mol). An diesem Gas kann man die Temperatur, den Druck oder das Volumen ändern (Zustandsänderung). Man misst alle drei Grössen vor und nach der Änderung. Die Menge des Gases kann man hier nicht verändern, also $n = \text{konstant}$.



Skizze 8.1: Das ideale Gas (Theorie)

Alle beliebigen Änderungen führen stets dazu, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{pV}{Tn} = \text{konstant} \quad (8.1)$$

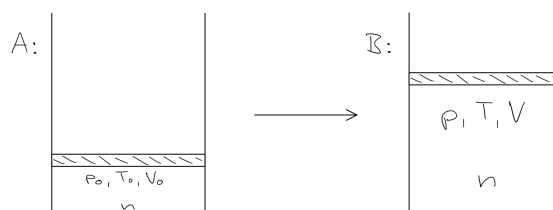
Diese Konstante hat den Wert 8.31. Aus den Einheiten links in der Gleichung erhält man für die Einheit dieser Konstante: $8.31 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{mol}} = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$. Diese Konstante wird mit R abgekürzt und heisst **universelle Gaskonstante**. Daraus ergibt sich die allgemeine Gasgleichung:

$$pV = nRT \quad (8.2)$$

mit:

- p : Druck, $[p] = \text{Pa}$
- V : Volumen, $[V] = \text{m}^3$
- n : Gasmenge, $[n] = \text{mol}$
- R : universelle Gaskonstante, $R = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$
- T : Temperatur, $[T] = \text{K}$

Beispiel: Im Formelbuch S.187 finden sich die Dichten verschiedener Gase bei Normalbedingungen ($T_0 = 0^\circ\text{C}$. & $p_0 = 101'325 \text{Pa}$). Wie gross ist die Dichte eines Gases bei beliebiger Temperatur T und beliebigem Druck p ?



Skizze 8.2: Das ideale Gas (Beispiel)

Die Anzahl mol n und die Masse m bleibt konstant.

$$\text{Situation A: } p_0 \cdot V_0 = nRT_0 \Rightarrow \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = nR$$

$$\text{Situation B: } pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR$$

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} \Rightarrow V = \frac{p_0 \cdot V_0 \cdot T}{T_0 \cdot p} \quad (8.3)$$

Gesucht war die Dichte des Gases:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{p_0 \cdot V_0 \cdot T}{T_0 \cdot p}} = \frac{m \cdot T_0 \cdot p}{p_0 \cdot V_0 \cdot T} = \rho_0 \frac{T_0 p}{p_0 T} \quad (8.4)$$

Die Dichte eines idealen Gases bei Temperatur T und Druck p ist dann:

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0 p}{p_0 T} \quad (8.5)$$

mit $p_0 = 101'325 Pa$ und $T_0 = 0^\circ C$. den Normalbedingungen.

8.1 Das Gesetz von Amontons

Bleibt bei einer Zustandsänderung das Volumen konstant, dann erhält man aus der Allgemeinen Gasgleichung $pV = nRT$ folgende Gleichung: $\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} = \text{konstant}$.

Somit erhält man das Gesetz von AMONTONS:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{wobei } n \text{ auch konstant gehalten wird (z.B. Raum abgeschlossen)} \quad (8.1.1)$$

Man spricht dann von einer **isochoren** Zustandsänderung.

Beispiel: Luft von $20^\circ C$. strömt in einen offenen Tiefkühlschrank. Der Umgebungsdruck beträgt $0.98 \cdot 10^5 Pa$. Die luftdichte Türe wird verschlossen und die Temperatur im Innern fällt auf $-18^\circ C$. Wie gross ist dann der Druck im Tiefkühler?

Volumen V und Gasmengen n bleiben konstant \Rightarrow AMONTONS!

$$\text{Aus } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 98'000 Pa \cdot \frac{273.15 K - 18 K}{273.15 K + 20 K} = \underline{\underline{0.853 \cdot 10^5 Pa}} \quad (8.1.2)$$

8.2 Das Gesetz von Gay-Lussac

Bleibt bei einer Zustandsänderung der Druck konstant, dann sprechen wir von einer **isobaren** Zustandsänderung. Aus der Allgemeinen Gasgleichung $pV = nRT$ folgt dann: $\frac{p}{nR} = \frac{T}{V} = \text{konstant}$. Das Gesetz von GAY-LUSSAC lautet somit:

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \quad \text{wobei } n \text{ auch konstant gehalten wird} \quad (8.2.1)$$

8.3 Das Gesetz von Boyle-Mariotte

Bleibt bei einer Zustandsänderung eines Gases die Temperatur konstant, dann spricht man von einer **isothermen** Zustandsänderung. Dann folgt aus der Allgemeinen Gasgleichung $pV = nRT = \text{konstant}$.

Das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{solange } n \text{ konstant bleibt} \quad (8.3.1)$$

8.4 Mol n , Molmasse m_{mol} & Molvolumen V_{mol}

Im Periodensystem der Elemente finden wir unter anderem folgendes:

$${}^A_Z E \quad (8.4.1)$$

Mit E dem Elementsymbol, A der Massenzahl und der Z der Kernladungszahl (vgl. Ordnungszahl). Die Massenzahl A ist das Vielfache eines atomaren „units“ u , wobei u ein Zwölftel der Masse des „normalen“ Kohlenstoffkerns ist: $1u = 1.66 \cdot 10^{-27} kg$. Die Masse eines Kerns ist dann

$m = A \cdot u$. Die Kernladungszahl Z gibt es die Anzahl Protonen (p^+) im Kern an. Die Differenz aus A und Z entspricht der Anzahl Neutronen (n^0).

Beispiele:

1. ^{12}C ist Kohlenstoff (mit $6p^+$) und $6n^0$, d.h. mit 12 Nucleonen.
2. Verschiedene Bausteine (Atome, Moleküle):
 - a) Eisen: $^{56}_{26}\text{Fe}$ ($26p^+$ & $30n^0$)
 - b) Wasser: $\text{H}_2\text{O} = {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + {}^{16}_8\text{O} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + {}^{16}_8\text{O}$
 - c) Neonglas: $^{20}_{10}\text{Ne}$ ($10p^+$ & $10n^0$)
 - d) Sauerstoffgas: $\text{O}_2 = {}^{16}_8\text{O} + {}^{16}_8\text{O} \rightarrow {}^{16}_8\text{O} + {}^{16}_8\text{O}$

Bemerkungen:

- Moleküle werden zur besseren Kennzeichnung in eckigen Klammern dargestellt.
- Die Massenzahl A aus dem Periodensystem entspricht dem natürlichen Gemisch der verschiedenen Isotope und wird für unsere Rechnungen immer auf ganze Zahlen gerundet.
- Die gerundete Massenzahl A entspricht der Nucleonenzahl.
- Die Kernladungszahl Z könnte man auch weglassen, da sie durch das Elementsymbol bereits gegeben ist.

Beispiel: Wie viele Teilchen der Sorte ${}^A E$ muss man in eine Kiste abfüllen, damit man A Gramm dieses Materials zusammenbekommt?

Ein Teilchen dieser Sorte hat die Masse $m = A \cdot u$.

N Teilchen die Masse $M = N \cdot m = N \cdot A \cdot u$ und dies sollen A Gramm sein.

$$M = N \cdot A \cdot u = A \cdot 10^{-3}\text{kg} \Rightarrow N = \frac{10^{-3}\text{kg}}{u} = \frac{10^{-3}\text{kg}}{1.66\text{kg}} \cdot 10^{-27}\text{kg} = \underline{\underline{6.02 \cdot 10^{24}}} \quad (8.4.2)$$

Das ist die Zahl von Avogadro N_A .

Egal um welche Sorte es sich handelt, N_A Teilchen der Sorte ${}^A E$ ergeben immer $A \cdot 10^{-3}\text{kg}$.

Die Materialmenge, welche $N_A = 6.02 \cdot 10^{24}$ Teilchen (Atome oder Moleküle) enthält, nennt man ein mol.

Somit ist die Molmasse m_{mol} die Masse eines mol Materials, also $m_{\text{mol}} = A \cdot 10^{-3}\text{kg}$.

Beispiele:

- 1 mol Neongas (${}^{20}\text{Ne}$): $m_{\text{mol}} = 0.02\text{kg}$
- 1 mol Sauerstoff ($[\text{O}_2]$): $m_{\text{mol}} = 0.032\text{kg}$
- 1 mol Wasserdampf (${}^{18}[\text{H}_2\text{O}]$): $m_{\text{mol}} = 0.018\text{kg}$
- 1 mol Kohlendioxid (${}^{44}[\text{CO}_2]$): $m_{\text{mol}} = 0.044\text{kg}$

Die Masse n mol ist dann $M = n \cdot m_{\text{mol}}$.

Welches Volumen beansprucht 1 mol eines Gases bei Normalbedingungen?

$$\text{Aus der Formel } \rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{n m_{\text{mol}}}{n V_{\text{mol}}} = \frac{m_{\text{mol}}}{V_{\text{mol}}} \Rightarrow V_{\text{mol}} = \frac{m_{\text{mol}}}{\rho_0}$$

Beispiele:

- Helium ${}^4\text{He}$: $V_{\text{mol}} = \frac{0.004\text{kg}}{0.1785\text{kg/m}^3} = 0.0224\text{m}^3$
- Sauerstoffgas ${}^{32}[\text{O}_2]$: $V_{\text{mol}} = \frac{0.032\text{kg}}{1.429\text{kg/m}^3} = 0.0224\text{m}^3$
- Kohlendioxid ${}^{44}[\text{CO}_2]$: $V_{\text{mol}} = \frac{0.044\text{kg}}{1.977\text{kg/m}^3} = 0.0223\text{m}^3$

Egal welches Gas, ein mol davon beansprucht bei Normalbedingungen etwa 22.4l.

Aufgaben:

1. Ein mol Wasser sei gleichmässig über die ganze Erdoberfläche (kugelförmige Erde) verteilt. Wieviele Wassermoleküle trifft es dann auf 1cm^2 Grundfläche?

In einem mol Wasser sind $6.02 \cdot 10^{23}$ Moleküle Wasser enthalten. Berechne die Oberfläche A der Erde mit einem Radius $r = 6.371 \cdot 10^6\text{m}$.

$$A = 4\pi(6.371 \cdot 10^6\text{m})^2 = 5.1 \cdot 10^{14}\text{m}^2 = 5.1 \cdot 10^{18}\text{cm}^2 \quad (8.4.3)$$

Also hat es pro cm^2 $\frac{6.02 \cdot 10^{23}}{5.1 \cdot 10^{18}} = 1.18 \cdot 10^5$ Teilchen.

2. Zeige, dass die allgemeine Gasgleichung auch in der Form $p = \frac{\rho RT}{m_{\text{mol}}}$ geschrieben werden kann.

Aus $pV = nRT$ folgt:

$$p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow \frac{nRT}{V} = \frac{\rho RT}{m_{\text{mol}}} \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{m_{\text{mol}}} \Rightarrow nm_{\text{mol}} = V\rho \Rightarrow m = m \quad (8.4.4)$$

Es stehen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Masse. q.e.d.

3. 100g CO_2 nehmen bei einem Druck von 1 bar ein Volumen von 55l ein. Berechne die Temperatur. Welcher Druck stellt sich ein, wenn das Volumen bei gleicher Temperatur auf 80l erhöht wird?

Aus der allgemeinen Gasgleichung folgt: $T = \frac{pV}{nR}$. Es gilt nur noch n zu bestimmen. Ein mol CO_2 hat eine Molmasse von $m_{\text{mol}} = (12 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3}\text{kg} = 0.044\text{kg} = 44\text{g}$. Also entsprechen 100g CO_2 genau $n = \frac{100\text{g}}{44\text{g}} = 2.27$. Dies ergibt:

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{10^5\text{Pa} \cdot 0.055\text{m}^3}{2.27 \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}} = \underline{\underline{291.22\text{K}}} \quad (8.4.5)$$

Für den zweiten Teil verwendet man das Gesetz von Boyle-Mariotte, woraus folgendes ergibt:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = \underline{\underline{6.875 \cdot 10^4\text{Pa}}} \quad (8.4.6)$$

4. Wie gross ist das Volumen von $m = 400\text{g}$ Sauerstoffgas bei 40°C . und 2.5 bar? Wie viele Moleküle sind darin enthalten? Wie gross ist die Dichte bei diesen Bedingungen?

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{\frac{400\text{g}}{32\text{g}} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 313.15\text{K}}{2.5 \cdot 10^5\text{Pa}} = 0.13018\text{m}^3 = \underline{\underline{130.18\text{l}}}$$

$$N = n \cdot N_A = \frac{400\text{g}}{32\text{g}} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = \underline{\underline{7.525 \cdot 10^{24}}} \quad (8.4.7)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \underline{\underline{3.07\text{kg/m}^3}}$$

5. Wie viele Gramm Argon enthält eine 300cm^3 grosse Glühlampe, deren Innendruck bei 15°C . 2.66 mbar beträgt?

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{266\text{Pa} \cdot 300 \cdot 10^{-6}\text{m}^3}{8.31 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} \cdot 288\text{K}} = 3.33 \cdot 10^{-5}\text{mol} \quad (8.4.8)$$

Ein mol Argon hat eine Molmasse von $m_{\text{mol}} = 40\text{g}$ (Edelgase sind einatomig!). Proportional hochgerechnet ist die totale Masse $m = 1.333 \cdot 10^{-3}\text{g} = \underline{\underline{1.33 \cdot 10^{-6}\text{kg}}}$.

6. Eine Vakuumröhre wurde während der Herstellung bei einem Druck von $1.6 \cdot 10^3\text{Pa}$ und 27°C . fest verschlossen. Sie hat ein Volumen von 100cm^3 . Berechne die Anzahl Moleküle in der Röhre.

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1600\text{Pa} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\text{m}^3}{8.31 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} \cdot 300.15\text{K}} = 6.41 \cdot 10^{-5}\text{mol} \quad (8.4.9)$$

Dies entspricht einer Teilchenzahl von $N = n \cdot N_A = \underline{\underline{3.86 \cdot 10^{19}}}$.

7. Während einer Unterrichtsstunde steigt die Temperatur im Schulzimmer bei konstanten 960 mbar von 18° auf 21°C . Die Abmessungen des Raumes sind $12\text{m} \times 5\text{m} \times 4\text{m}$. Wie viele Gasteilchen entweichen? Welche Luftmasse entweicht?

$$\Delta n = \frac{pV}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \frac{0.96 \cdot 10^5\text{Pa} \cdot (12 \cdot 5 \cdot 4)\text{m}^3}{8.31 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}} \cdot \left(\frac{1}{294.15\text{K}} - \frac{1}{291.15\text{K}} \right) = \underline{\underline{-97.12\text{mol}}} \quad (8.4.10)$$

Es entweichen also 97.12mol Luft aus dem Zimmer. Dies entspricht einer Teilchenzahl von $N = n \cdot N_A = \underline{\underline{5.85 \cdot 10^{25}}}$ Teilchen oder $m = n \cdot M = \underline{\underline{2.18\text{kg}}}$.

(Molare Masse, die von der Molmasse hergeleitet wird, von Luft aus 76% Stickstoff (28g/mol), 23% Sauerstoff (32g/mol) und 1% Argon (40g/mol), ergibt 29.04g/mol)

8. Wassermoleküle haben etwa einen Durchmesser von $3 \cdot 10^{-10}\text{m}$. Wie viele Durchmesser beträgt der mittlere Abstand zwischen zwei Wassermolekülen in Wasserdampf mit der Temperatur 100°C . und dem Druck von einem bar? Tipp: Berechne zuerst das von einem mol beanspruchte Volumen.

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1 \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} \cdot 373.15\text{K}}{10^5\text{Pa}} = 0.031\text{m}^3 \quad (8.4.11)$$

Dies entspricht einer Kantenlänge von $\sqrt[3]{0.031} = 0.314\text{m}$. Auf diese Kantenlänge kommen $\sqrt[3]{6.02 \cdot 10^{23}} = 8.44 \cdot 10^7$ Teilchen (basierend auf den Tipp). Also hat jedes Teilchen einen Platz von $\frac{0.314\text{m}}{8.44 \cdot 10^7} = 3.7 \cdot 10^{-9}\text{m}$. Dies entspricht etwa 12 Moleküldurchmessern.

9 Einfaches Teilchenmodell

Aus der Mechanik kennen wir unter anderem folgende Grössen: m , t , \vec{v} , \vec{a} , E , \vec{p} , P . Bei den Gasen kommt zusätzlich noch T dazu.

Wir erstellen ein mechanisches Modell für ein Gas:

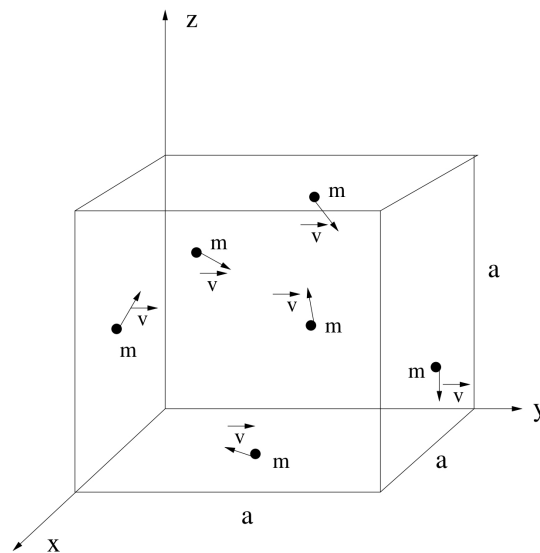


Abbildung 9.1: Einfaches Teilchenmodell (Theorie)

Wir legen fest:

- In einer würfelförmigen Kiste (Kantenlänge a) seien N Kügelchen (Gasteilchen) eingesperrt.
- Es seien Punktmassen (Volumen = 0).
- Alle Teilchen haben die gleiche Masse m .
- Alle haben den gleichen mittleren Geschwindigkeitsbetrag v .
- Alle Bewegungsrichtung sind gleich wahrscheinlich. Vereinfachung: Je $\frac{N}{6}$ Teilchen bewegen sich jederzeit in $+x$, $-x$, $+y$, $-y$, $+z$ und $-z$ Richtung.
- An der Wand werden die Teilchen elastisch reflektiert ($\Delta E = 0$).
- Zwischen den Teilchen sollen keine Kräfte wirken.

Jetzt versuchen wir den Gasdruck auszurechnen. Plan: Prallt ein Teilchen gegen die Wand, erhält diese einen kurzen Kraftstoss.

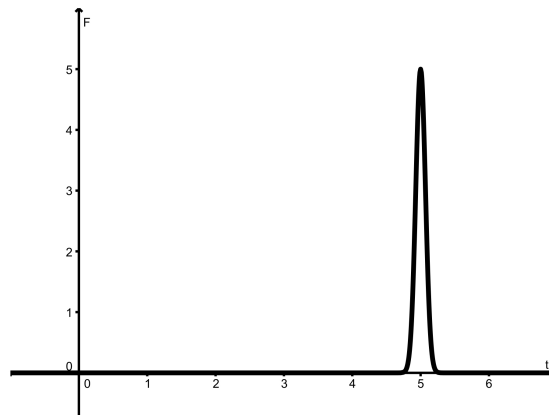


Abbildung 9.2: Einfaches Teilchenmodell (Theorie)

Durch das Bombardement vieler Teilchen resultiert eine mittlere Kraft \bar{F} .

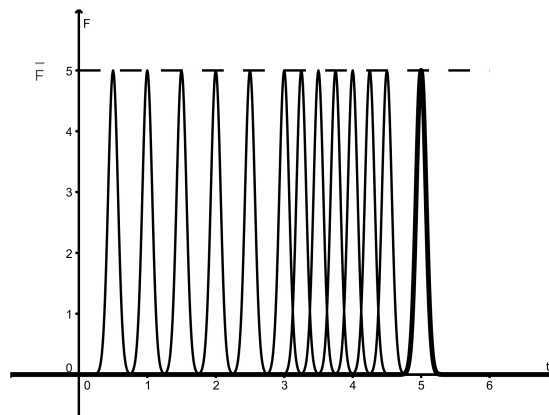


Abbildung 9.3: Einfaches Teilchenmodell (Theorie)

Es ist dann Druck = $\frac{\bar{F}}{\text{Wandfläche}}$. Plan fertig. Ausführung mit dem Impulssatz:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{res}} \quad (9.1)$$

Betrachte zur Zeit t die $x - z$ Wand mit der Fläche a^2 und den davorliegenden Bereich mit der Dicke Δy , also das Volumen $V' = a^2 \Delta y$. In diesem Volumen hat es $\frac{N}{V} \cdot V' = N'$ Teilchen, welche nach links laufen, also die Geschwindigkeit v in negativer Richtung haben.

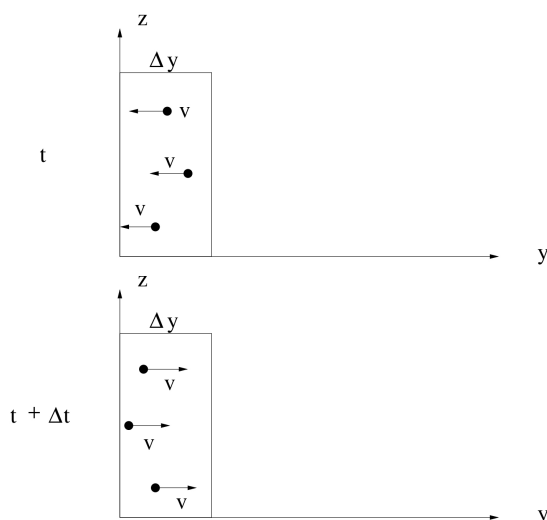


Abbildung 9.4: Einfaches Teilchenmodell (Theorie)

Der Impuls zu dieser Zeit t ist also:

$$p(t) = -N' \cdot mv \tag{9.2}$$

Der Impuls zur Zeit $t + \Delta t$ mit $\Delta t = \frac{\Delta y}{v}$ ist dann:

$$p(t + \Delta t) = N' \cdot mv \tag{9.3}$$

Also ist die Impulsänderung...

$$\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) = 2N'mv \tag{9.4}$$

... und mit $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ folgt:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2N'mv}{\Delta t} = \frac{2N'mv^2}{\Delta y} = \frac{2 \frac{NV'}{6V} mv^2}{\Delta y} = \frac{2 \frac{Na^2 \Delta y}{6V} mv^2}{\Delta y} = 2 \frac{Na^2}{6V} mv^2 = \dots \tag{9.5}$$

Nach einem kleinen Trick:

$$\dots = 2 \frac{Na^2}{3V} \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Na^2}{V} \cdot E_{\text{kin}} \tag{9.6}$$

Teile beide Seiten durch die Fläche a^2 und erhalte links den Druck:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot E_{\text{kin}} \quad \text{oder} \quad pV = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{\text{kin}} \quad \text{unsere Gasgleichung} \tag{9.7}$$

Wir vergleichen unsere Gasgleichung mit der allgemeinen Gasgleichung und stellen fest:

$$\begin{aligned} nRT &= 2/3 \cdot N \cdot E_{\text{kin}} \\ nRT &= 2/3 \cdot n \cdot N_A \cdot E_{\text{kin}} \\ RT &= 2/3 \cdot N_A \cdot E_{\text{kin}} \\ E_{\text{kin}} &= 3/2 \cdot \underbrace{\frac{R}{N_A}}_{k_B} \cdot T \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T = \frac{1}{2} mv^2 \tag{9.9}$$

mit:

- E_{kin} , der mittleren Bewegungsenergie eines Teilchen in J
- T , der Temperatur in K
- k_B , der Boltzmannkonstanten $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$
- m , der Masse eines Gasteilchens in kg
- v , der mittleren Geschwindigkeit in m/s

Folgerung:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{>0} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \quad (9.10)$$

Also muss auch $T > 0$ gelten \Rightarrow keine negativen Temperaturen!

Beispiel: Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich Sauerstoff-, Stickstoff- und Heliumteilchen im Schulzimmer ($20^\circ C$)?

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}} \quad (9.11)$$

$$^{32}[O_2] : m = 32 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} kg \Rightarrow v = 478 m/s$$

$$^{28}[N_2] : m = 28 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} kg \Rightarrow v = 511 m/s$$

$$^4He : m = 4 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} kg \Rightarrow v = 1352 m/s$$

Je leichter die Teilchen, desto schneller sind sie bei gleicher Temperatur unterwegs.

Aufgaben:

1. In einem Gas habe ein einzelnes Gasteilchen eine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 6.565 \cdot 10^{-21} J$. Welche Temperatur herrscht?

$$T = \frac{2E_{\text{kin}}}{3k_B} = \underline{\underline{317.15K}} \quad (9.12)$$

2. Das Teilchen aus der letzten Aufgabe sei ein CO_2 Molekül. Wie schnell ist es unterwegs?

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}} = \underline{\underline{423.99m/s}} \quad (9.13)$$

3. Einem mol Stickstoffgas werden bei 10°C . 500J Wärmeenergie zugeführt. Die ganze zugeführte Energie geht in Bewegungsenergie über. Um wieviele m/s nimmt die mittlere Geschwindigkeit eines Gasmoleküls dadurch zu?

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\frac{3k_B(10^\circ\text{C} + 273.15)}{28u}} = 502.23\text{m/s} \\
 E_{\text{kin}} &= \frac{3}{2}k_B(10^\circ\text{C} + 273.15) = 5.86 \cdot 10^{-21}\text{J} \\
 E' &= E_{\text{kin}} + \underbrace{\frac{500\text{J}}{N_A}}_{\text{Aufteilung der Energie auf 1 mol}} = 6.69 \cdot 10^{-21}\text{J}
 \end{aligned}
 \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned}
 E' &= \frac{1}{2} \cdot 28u \cdot v^2 \\
 \sqrt{\frac{2E'}{28u}} &= v \\
 &= \underline{\underline{536.61\text{m/s}}}
 \end{aligned}$$

4. Um wieviel muss man den Druck in einem idealen Gas verringern ($p_2 = f(p_1)$), damit sich die mittlere Geschwindigkeit der Gasteilchen halbiert? (Das Volumen bleibt dabei konstant)

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} & T &= \frac{pV}{nR} & v_2 &= \frac{v_1}{2} \\
 v &= \sqrt{\frac{3k_B pV}{nRm}} \\
 v^2 &= \frac{3k_B pV}{nRm} \\
 \frac{v_2^2 nRm}{3k_B V} &= p_2 \\
 \frac{v_1^2 nRm}{4 \cdot 3k_B V} &= \frac{v_2^2 nRm}{3k_B V} \\
 \underline{\underline{\frac{p_1}{4}}} &= p_2
 \end{aligned}
 \tag{9.15}$$

10 Wärme und Temperaturänderung

Frage: Wieviel Wärme (Energie) ist nötig, um 1g Wasser von 14.5°C auf 15.5°C bei Normaldruck zu erwärmen? (*Definition der Kalorie*). In diesem Kapitel geht es unter anderem um solche Fragen.

Wärme ist eine Energieform

10.1 Die innere Energie U

Die innere Energie U ist die gesamte *Bewegungsenergie* (kinetische Energie) der Teilchen und die in der Anordnung der Teilchen steckende *Bindungsenergie* (potentielle Energie).

Die Bewegungsenergie ist direkt proportional zur Temperatur des Körpers. U kann auf zwei Arten verändert werden:

1. Dem Körper wird Arbeit W zugeführt oder entzogen.
2. Dem Körper wird Wärme Q zugeführt oder entzogen.

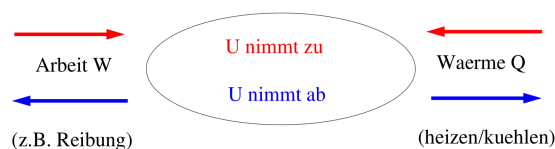


Abbildung 10.1.1: Wärme und Temperaturänderung (Theorie)

Satz: Erster Hauptsatz der Wärmelehre

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (10.1.1)$$

Wenn der Körper seine Phase (Aggregatzustand) *nicht* ändert, so hat eine Änderung der inneren Energie zwangsläufig eine Änderung der Temperatur zur Folge.

10.2 Die spezifische Wärmekapazität c

Definition: Die Wärmemenge ΔQ (Energie), welche benötigt wird, um die Temperatur von 1kg eines Materials um 1 K zu erhöhen nennt man **spezifische Wärmekapazität** c dieses Materials.

Beim Abkühlen wird diese Energie wieder frei.

Verändert man die Temperatur von m kg eines Materials um ΔT K, so ist folgende Wärmemenge nötig:

$$\Delta Q = mc\Delta T \quad (10.2.1)$$

mit:

- ΔQ der Wärmemenge in J
- m der Masse des Materials in kg
- c der spezifischen Wärmekapazität in $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
- ΔT der Temperaturänderung K

Experiment: Wir messen die spezifische Wärmekapazität c von Wasser, indem wir $m = 1.349\text{kg}$ Wasser der Temperatur $T_1 = 22.1^\circ\text{C}$ mit einem Tauchsieder auf die Temperatur $T_2 = 52.1^\circ\text{C}$ erwärmen. Dazu hat der Tauchsieder die elektrische Energie $E = 50\text{Wh}$ aufgenommen und als Wärme an das Wasser abgegeben.

Aus: $\Delta Q = mc\Delta T \Rightarrow c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} = \frac{50\text{Wh} \cdot 3600\text{s}}{1.349\text{kg} \cdot (52.1 - 22.1)\text{K}} = \underline{\underline{4447.74\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}}$
 Tabellenwert für Wasser: $c = 4182\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

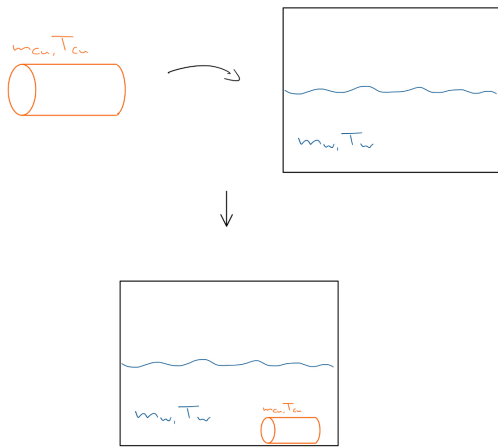
Frage (Aufgabe): Aus welcher Höhe h müsste man 1kg Wasser fallen lassen, damit es sich beim Aufprall am Boden um 1K erwärmt?

Energieäquivalenz: $E_{\text{pot}} \rightarrow E_{\text{kin}} \rightarrow \Delta Q$
 $mgh = mc\Delta T$
 $h = \frac{c\Delta T}{g}$ (10.2.2)
 $= \frac{4182 \cdot 1}{9.81}$
 $= \underline{\underline{426.30\text{m}}}$

Satz: Befinden sich zwei Körper im thermischen Kontakt, so ist die von einem Körper abgegebene Wärmemenge Q^{\nearrow} gleich gross wie jene von anderen Körper aufgenommen Wärmemenge Q^{\nwarrow} (solange kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet).

$Q^{\nearrow} = Q^{\nwarrow}$ (10.2.3)

Experiment: Wir bestimmen die spezifische Wärmekapazität von Kupfer c_{Cu} , indem wir m_{Cu} der Temperatur T_{Cu} zu Wasser der Masse m_{W} und Temperatur T_{W} geben. Nach einer Weile messen wir die Gleichgewichtstemperatur T .



Wir messen:

$m_{\text{Cu}} = 261.748\text{g}$
 $T_{\text{Cu}} = 97.8^\circ\text{C}$
 $m_{\text{W}} = 538.8\text{g}$
 $T_{\text{W}} = 22.1^\circ\text{C}$
 $T = 25.2^\circ\text{C}$

Skizze 10.1: Wärme und Temperaturänderung (Experiment)

Es gilt $Q^{\nearrow} = Q^{\nwarrow}$
 $m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}}(T_{\text{Cu}} - T) = m_{\text{W}}c_{\text{W}}(T - T_{\text{W}})$
 $c_{\text{Cu}} = \frac{m_{\text{W}}c_{\text{W}}(T - T_{\text{W}})}{m_{\text{Cu}}(T_{\text{Cu}} - T)}$ (10.2.4)
 $= \underline{\underline{367.59\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}}$

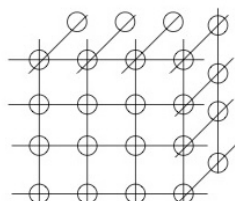
Tabellenwert: $c_{\text{Cu}} = 383\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Beispiel: Ich bekomme Fieber. Dabei steigt meine Körpertemperatur in einer Stunde um 2°C . Bestimme die Heizleistung des Körpers. Um den Körper zu erwärmen braucht man etwa gleichviel Energie wie 75% der Körpermasse an Wasser zu erwärmen.

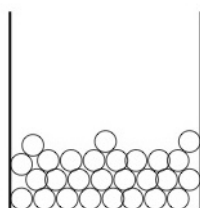
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{m \cdot 0.75 \cdot c \Delta T}{\Delta t} = \underline{\underline{121.98\text{W}}} \quad (10.2.5)$$

10.3 Phasenübergänge

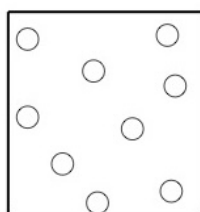
Wir beobachten folgende Phasen (Aggregatzustände): fest, flüssig, gasförmig, (Plasma):



Fest: Gitterstruktur eigene Form, starke Bindungskräfte (radial und tangential)



Flüssig: ungeordnet, nur eigene Oberfläche, kleine Abstände, tangential kaum Kräfte (starke radiale Abstossungskraft gegen Druck)



Gasförmig: ungeordnet (solisten), keine eigenen Grenzflächen, grosse Abstände, keine Bindungskräfte

Abbildung 10.3.1: Phasenübergänge

Die Umwandlung von einer Phase in die andere (z.B. verdampfen) nennt man einen **Phasenübergang**. Die Temperatur, bei welcher eine solche Änderung der Phase passiert, hängt vom Material und vom äusserem Druck ab.

In der folgenden Übersicht sind die Phasenübergänge zusammengefasst:

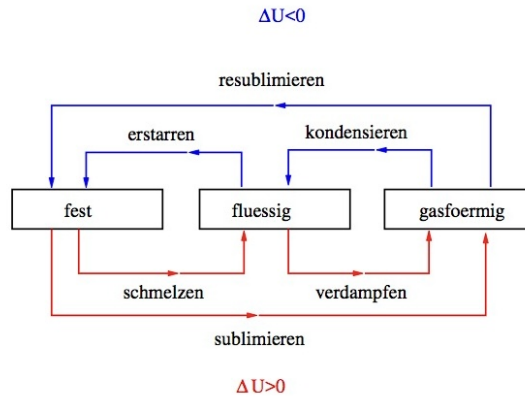


Abbildung 10.3.2: Wärme und Temperaturänderung (Theorie)

Definition: Die **spezifische Schmelzwärme** L_f eines bestimmten Materials entspricht der Energie, welche bei der Schmelztemperatur nötig ist, um 1kg dieses Materials zu schmelzen. Um $m\text{ kg}$ zu schmelzen, ist folgende Wärmemenge (Energie) richtig:

$$Q_f = m \cdot L_f \tag{10.3.1}$$

Beispiel: Die spezifische Schmelzwärme von Wasser (Eis) ist:

$$L_{f, H_2O} = 3.338 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} \tag{10.3.2}$$

Beim Erstarren wird diese Wärme wieder frei. Deshalb heisst die Schmelzwärme auch Erstarrungswärme.

Definition: Die **spezifische Verdampfungswärme** L_v eines bestimmten Materials entspricht der Energie, welche bei der Verdampfungstemperatur nötig ist, um 1kg dieses Materials zu verdampfen.

Um $m\text{ kg}$ zu verdampfen, ist folgende Wärme (Energie) nötig:

$$Q_v = m \cdot L_v \tag{10.3.3}$$

Beim Kondensieren wird diese Wärme wieder frei. Deshalb nennt man die Verdampfungswärme auch Kondensationswärme.

Beispiel: Die spezifische Verdampfungswärme von Wasser ist:

$$L_{v, H_2O} = 2.257 \cdot 10^6 \frac{J}{kg} \tag{10.3.4}$$

Beispiel: Wir bestimmen die notwendige Energiemenge (Wärme) für folgende Prozess: 2kg Eis der Temperatur -10°C . soll vollständig verdampft werden.

$$\begin{aligned} -10^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C} &\hat{=} Q_1 = mc_{\text{Eis}}\Delta T = 2\text{kg} \cdot 2100 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \cdot 10K = 4.2 \cdot 10^4 J \\ \text{Eis} \rightarrow \text{Wasser} &\hat{=} Q_2 = m \cdot L_f = 2\text{kg} \cdot 3.338 \cdot 10^5 \frac{J}{\text{kg}} = 6.67 \cdot 10^5 J \\ 0^\circ\text{C} \rightarrow 100^\circ\text{C} &\hat{=} Q_3 = mc_{H_2O}\Delta T = 2\text{kg} \cdot 4182 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \cdot 100K = 8.36 \cdot 10^5 J \\ \text{Wasser} \rightarrow \text{Dampf} &\hat{=} Q_4 = m \cdot L_v = 2\text{kg} \cdot 2.257 \cdot 10^6 \frac{J}{\text{kg}} = 4.51 \cdot 10^6 J \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

Total: $6.06 \cdot 10^6 J$

Darstellungsarten des Energieverbrauchs:

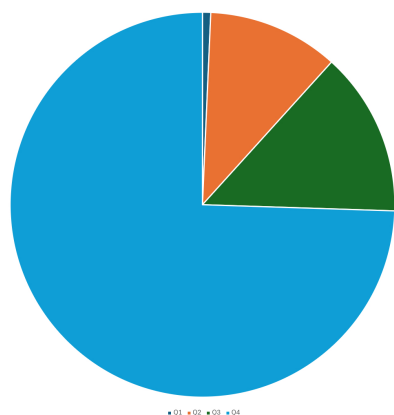


Abbildung 10.3.3: Energieverbrauch im Kuchen-diagramm

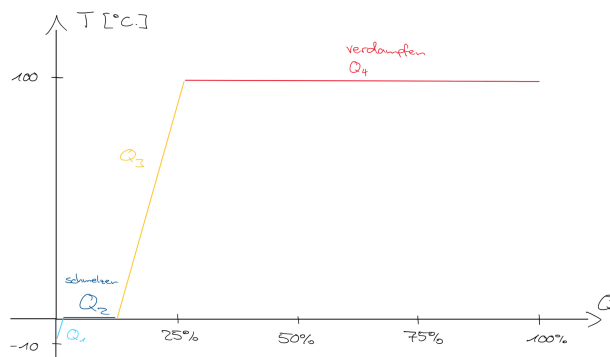


Abbildung 10.3.4: Energieverbrauch im Liniendiagramm

10.4 Wärmekraftmaschinen

Eine Maschine wandelt Primärenergie in Sekundärenergie um.

Beispiele:

- Bremsmaschine: $E_{kin} \rightarrow Q$
- Dynamo: Rotationsenergie \rightarrow elektrische Energie & Q
- Elektromotor: elektrische Energie \rightarrow Rotationsenergie & Q
- Feuer: chemische Energie $\rightarrow Q$ & Licht (Photoenergie)

Definition: Der Wirkungsgrad η einer Maschine ist das Verhältnis zwischen Nutzenergie E_{nutz} und investierter Energie E_{invest} :

$$\eta = \frac{E_{nutz}}{E_{invest}} \quad 0 \leq \eta < 1 \tag{10.4.1}$$

Beispiel: Ein quaderförmiger Stausee ($L = 400m, B = 100m, T = 50m$) erzeugt beim Entleeren im $180m$ tiefer gelegenen Kraftwerk $8 \cdot 10^5 kWh$ elektrische Energie. Gesucht ist der Wirkungsgrad.

$$\eta = \frac{E_{nutz}}{E_{invest}} = \frac{8 \cdot 10^5 kWh}{mgh} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 3.6 \cdot 10^6 J}{LBT \cdot \rho_{H_2O}gh} = 0.81 \approx \underline{\underline{81.71\%}} \tag{10.4.2}$$

Beispiel: Ein Lastwagen ($m_1 = 30t$) fährt konstanter Geschwindigkeit ins Misox hinunter ($\Delta h = 500m$). Die zum Bremsen entstehende Wärme werde zu 45% abgestrahlt, der Rest heizt die Bremsen ($m_2 = 200kg$ Eisen) auf (aber 55% werden trotzdem von E_{pot} abgerechnet). Berechne ΔT .

$$\begin{aligned} \text{Energieerhaltung } E_{pot} &= Q & m_1gh \cdot 0.55 &= m_2c_{Fe}\Delta T \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{m_1gh \cdot 0.55}{m_2c_{Fe}} &= \underline{\underline{899.25^\circ C}} \end{aligned} \tag{10.4.3}$$

Eine Maschine, welche Wärme (innere Energie) in eine andere Energiesorte umwandelt heisst **Wärmekraftmaschine** (z.B.: Stirling-Motor (Heissluftmotor), Dampfmaschine, Automotor, ...).

Sie funktionieren alle nach folgendem Prinzip:

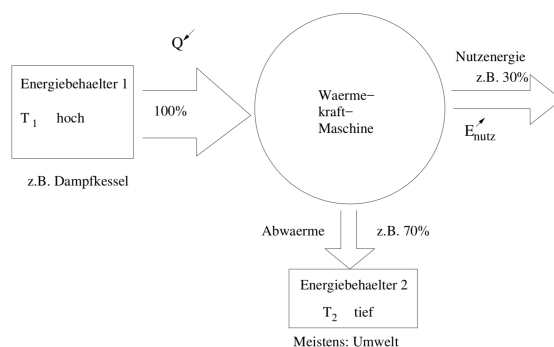


Abbildung 10.4.1: Wärme und Temperaturänderung (Theorie)

Es gibt keine Wärmekraftmaschine, welche die aufgenommenen Wärme Q zu 100% in Nutzenergie E_{nutz} umwandelt, d.h. es gibt keinen Wirkungsgrad von $\eta = 1$. Vielmehr wird ein Teil der Wärme ungenutzt als Abwärme wieder abgegeben. Dafür sind dann Kühlsysteme nötig (Kühler beim Auto, Kühlturm beim thermischen Kraftwerk, ...). Da die aufgenommene Energie meist in Form von Wärme Q besteht (Wärmekraftmaschine), kann der Wirkungsgrad geschrieben werden als:

$$\eta = \frac{E_{\text{nutz}}}{Q} \tag{10.4.4}$$

Wärmekraftmaschinen haben einen Wirkungsgrad in der Grössenordnung $\eta \approx \frac{1}{3}$. Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 - 1832) hat gezeigt, dass der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine höchstens so gross sein kann:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{10.4.5}$$

mit T_1, T_2 in Kelvin. Reale Wärmekraftmaschinen erreichen etwa $\eta = 0.8 \cdot \eta_{\text{Carnot}}$.

Beispiel: Bei einer Dampfmaschine hat der heisse Dampf eine Temperatur $T_1 = 300^\circ\text{C}$., der Abdampf eine solche von $T_2 = 100^\circ\text{C}$. Somit ist der (theoretisch höchstmöglicher) Carnotwirkungsgrad: $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.35 \approx \underline{\underline{34.89\%}}$.

Beispiel: Volldruckdampfmaschine

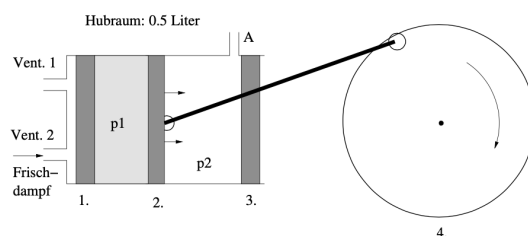


Abbildung 10.4.2: Wärme und Temperaturänderung (Beispiel)

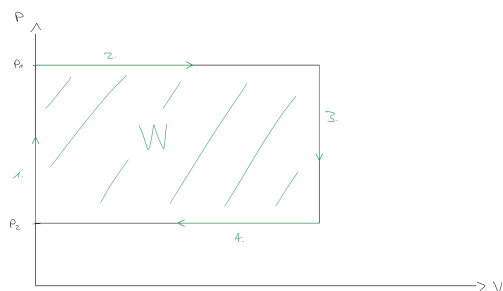
Hubraum $\hat{=}$ beanspruchte Volumen des Zylinders

1. Ventil 1 schliesst, Ventil 2 öffnet \Rightarrow Frischdampf unter hohem Druck $p_1 = 3 \text{ bar}$ strömt in den Zylinder.

2. Der Stempel (Kolben) wird nach rechts gedrückt \Rightarrow Maschine verrichtet Arbeit W .
3. Öffnung A wird erreicht, Ventil 2 schliesst \Rightarrow Druck fällt auf Aussendruck $p_2 = 1$ bar ab.
4. Ventil 1 öffnet, Schwungrad schiebt Kolben wieder nach links auf Position 1

Wir berechnen die von der Volldruckdampfmaschine verrichtete Arbeit (pro Zyklus). Bei den meisten Wärmekraftmaschinen wird Arbeit verrichtet, indem ein Gas expandiert (Volumenarbeit). Normalerweise ist der Druck im Zylinder nicht konstant. Der Einfachheit halber soll der Druck bei uns konstant bleiben, d.h. p_1 ist konstant (isobare Zustandsänderung).

Ein Arbeitszyklus kann im Druck-Volumen-Diagramm dargestellt werden:



Dabei wird folgende Volumenarbeit verrichtet:

$$W = |\Delta p| \cdot |\Delta V| \quad (10.4.6)$$

Skizze 10.2: Wärme und Temperaturänderung (Theorie)

Wobei Δp der (konstanten) Druckdifferenz und ΔV dem Hubraum entsprechen. Anders gesagt: Die Volumenarbeit entspricht der eingeschlossenen Fläche im p-V-Diagramm.

Beweis der Formel:

Arbeit ist Kraft (in Wegrichtung) mal Weg. Der Kraft auf den Kolben ist $F = \Delta p \cdot A = (p_1 - p_2)A$, wobei A die Querschnittsfläche des Kolbens ist. Legt der Kolben pro Hub den Weg Δs zurück, dann gilt für die Arbeit:

$$\begin{aligned} F &= \Delta p \cdot A \\ \text{erweitern mit } W &= F \cdot \Delta s \\ F \cdot \Delta s &= \Delta p \cdot \underbrace{A \cdot \Delta s}_{=V} \\ W &= \Delta p \cdot V \Rightarrow |\Delta p| \cdot |\Delta V| \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

Die Betragsstriche werden gebraucht, um negative Arbeit vorzubeugen.

Aufgabe: Berechne die Leistung bei 600 Umdrehungen pro Minuten ($1PS = 735.5W$).

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta p \cdot \Delta V}{\Delta t} \\ &= \frac{2 \text{ bar} \cdot 500 \text{ cm}^3}{\frac{60 \text{ s}}{600}} \\ &= \frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{0.1 \text{ s}} \\ &= 1000 \text{ W} \approx \underline{\underline{1.36 \text{ PS}}} \end{aligned} \quad (10.4.8)$$

Der Wirkungsgrad einer Volldruckdampfmaschine ist $\approx 4\%$. Derjenige einer Dampflokomotive ist (Expansionsdampfmaschine): 15 – 20%.

Satz: Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Ein Prozess, bei welchem eine gewisse Wärmemenge einen kalten Reservoir entzogen wird, und dieselbe Wärmemenge einen warmen Reservoir zugeführt wird, ist unmöglich.

Beispiel: Warum ist der Wirkungsgrad eines Dieselmotors besser als jener eines Benzinmotors? Dieselmotoren nutzen den eingesetzten Kraftstoff effizienter, weil sie durch höhere Verdichtung und andere Verbrennungsprozesse mehr Nutzarbeit pro Energieeinheit liefern.

Mögliche Prüfungsfrage: Inwiefern unterscheidet sich diese Art von Motor von diesem? Was sind die Merkmale von diesem Motor?

10.4.1 Perpetuum mobile

Definition: Ein **perpetuum mobile 1. Art** ist eine Maschine, welche einen Wirkungsgrad von $\eta > 1$ hat. Sie könnte nicht nur die zugeführte Energie zu 100% in eine andere umwandeln und Nutzarbeit verrichten, sondern würde auch noch alle Reibungsverluste etc. überwinden. Ein perpetuum mobile 1. Art würde den Energieerhaltungssatz verletzen und ist daher nicht möglich. Auch wenn man alle Reibungseffekte vermeiden könnte, so würde eine solche Maschine nur sich selbst in Bewegung halten und nicht zusätzlich Arbeit verrichten können (hier Messer schleifen).

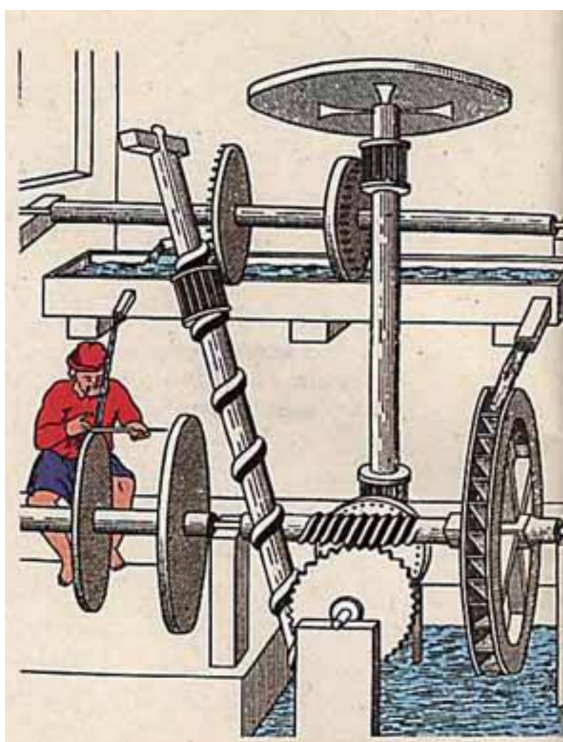


Abbildung 10.4.3: Perpetuum mobile 1. Art, nach einer Zeichnung von Jacopo de Strada, 1580

Definition: Ein **perpetuum mobile 2. Art** ist eine Maschine, die Arbeit verrichten kann, indem sie ihrer Umgebung Wärme entzieht und somit die Umgebung abkühlt. Sie braucht kein Temperaturgefälle. Es ist aber nicht möglich aus einem Raum indem alle Teilchen die gleiche Temperatur haben, Wärme zu entziehen ohne, dass bereits ein Temperaturgefälle vorhanden wäre. Man kann nur durch Arbeit den ganzen Raum aufheizen aber nicht umgekehrt (Irreversibilität der Umwandlung vor Arbeit in Wärme). Ein perpetuum mobile 2. Art würde nicht den Energieerhaltungssatz aber den 2. Hauptsatz der Thermodynamik verletzen und ist deshalb nicht möglich.

10.4.2 Zweitakt-Bezinmotor

Im Gegensatz zum Viertakt-Motor besitzt der Zweitakt-Motor keine beweglichen Ventile, sondern nur Einlass- und Auspufföffnung sowie im Innern des Kurbelgehäuses einen Überströmkanal; diese Öffnungen werden jeweils durch den Kolben freigegeben bzw. geschlossen.

1. Takt

Der Überströmkanal und die Auspufföffnung sind geschlossen; durch die Aufwärtsbewegung des Kolbens wird das Benzin-Luft-Gemisch komprimiert. Gleichzeitig strömt durch die Einlassöffnung aus dem Vergaser das Benzin-Luft-Gemisch in das Kurbelgehäuse.

2. Takt

Das komprimierte Gasgemisch wird durch einen Funken der Zündkerze gezündet; der Kolben wird durch den Explosionsdruck nach unten bewegt; dadurch werden die Auspufföffnung und der Überströmkanal freigegeben, während die Einlassöffnung geschlossen wird. Durch den Überströmkanal strömt das noch nicht verbrannte Benzin-Luft-Gemisch in den Zylinder und drückt die verbrannte Gase durch die Auspufföffnung hinaus.

Im Gegensatz zum Viertakt-Motor muss bei einem Zweitakt-Motor das Kurbelgehäuse gasdicht sein. Ein wesentlicher Nachteil ist, dass im Zylinder das einströmende Gasgemisch nicht von den Verbrennungsgasen getrennt ist. Daher besitzen Zweitakt-Motoren einen niedrigeren Wirkungsgrad und haben einen vergleichsweise höheren Benzinverbrauch als gleichgrosse Viertakt-Motoren.

Modell:

1. Eintritt von Benzin in der Vergaser
2. Lufteintritt
3. Benzindrüse
4. Eintrittsöffnung des Gemisches
5. Drosselklappe
6. Kolben
7. Pleuelstange
8. Kurbelwelle
9. Kurbelgehäuse
10. Überströmkanal
11. Zylinder
12. Zündkerze
13. Auspuff
14. Starterklappe

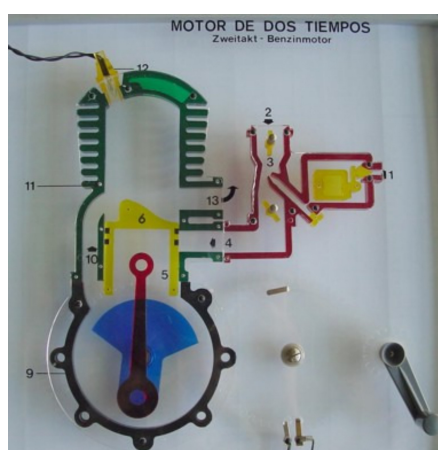


Abbildung 10.4.4: Zweitakt-Benzinmotor (Modell)

10.4.3 Viertakt-Benzinmotor

1. Takt: Ansaugtakt

Der Kolben bewegt sich nach unten. Das Einlassventil ist geöffnet. Durch die Abwärtsbewegung wird Luft angesaugt. Die Luft strömt durch den Vergaser. Dort wird aus einer Düse Benzin mitgerissen. Ein homogenes Gas aus Benzin und Luft entsteht. Dieses brennbare Gasgemisch strömt in den Zylinder. Das Einlassventil wird geschlossen, wenn der Kolben unten ist (unterer Totpunkt, UT).

2. Takt: Verdichten, Kompressionstakt

Der Kolben bewegt sich wieder nach oben. Alle Ventile sind geschlossen. Das Gasgemisch wird komprimiert.

3. Takt: Arbeitstakt

Kurz bevor der Kolben zuoberst ankommt (oberer Totpunkt, OT) wird das brennbare Gemisch durch einen elektrischen Funken der Zündkerze entzündet. Die freiwerdende Energie erwärmt das Gas. Das Gas dehnt sich aus, der Kolben wird nach unten geschoben (alle Ventile sind geschlossen). Arbeit wird geleistet. Die Pleuelstange überträgt die Kraft auf die Pleuelstange: eine Drehbewegung entsteht. Der bei diesem Takt gewonnene „Schwung“ reicht für die anderen 3 Takte.

4. Takt: Ausstossen

Das Auslassventil öffnet sich ungefähr, wenn der Kolben im unteren Totpunkt ist. Bei der Aufwärtsbewegung des Kolbens wird das verbrannte Gemisch durch das Auslassventil in den Auspuff entlassen. Das Gas enthält immer noch einiges an Wärmeenergie. Wenn der Kolben oben ist (oberer Totpunkt) schließt sich das Auslassventil und das Einlassventil öffnet sich: weiter mit dem 1. Takt.

Der Wirkungsgrad eines Verbrennungsmotors hängt davon ab, wieviel von der freiwerdenden Verbrennungsenergie an den Kolben abgegeben werden kann. Je heisser die Auspuffgase sind, umso schlechter: Energie verpufft ungenutzt in die Umwelt. Man nutzt entweder die heissen Auspuffgase mit einem Turbo oder sorgt dafür, dass sich das Gas im Zylinder möglichst weit ausdehnen (und damit abkühlen) kann. Das Verhältnis zwischen Volumen im Zylinder im OT und Volumen im Zylinder im UT nennt man Verdichtungsverhältnis. Je grösser dieses Verhältnis ist umso höher der Wirkungsgrad.

Das Verdichtungsverhältnis ist bei einem Benzinmotor etwas 10:1 und bei einem Dieselmotor etwa 20:1. Wir erwarten also für Benzinmotoren einen schlechteren Wirkungsgrad. Bei Benzinmotoren kann kein höheres Verdichtungsverhältnis realisiert werden, weil das brennbare Benzin-Luftgemisch während des 2. Takts (Verdichten von 10 auf 1) sonst schon selbständig explodieren würde, bevor der Kolben den oberen Totpunkt (OT) erreicht.

Nachteil des Benziners:

- Tieferer Wirkungsgrad als Dieselmotor

Vorteile des Benziners:

- Da höhere Tourenzahlen möglich sind als beim Dieselmotor ist die Spitzenleistung höher
- Es werden kaum krebserregende Russpartikel ausgestossen

Heute werden statt Vergaser Einspritzsysteme verwendet, welche das Benzin genau dosiert in den Ansaugkanal einspritzen. Das Funktionsprinzip ist ansonsten genau das gleiche: Es wird auch ein brennbares Gemisch angesaugt und komprimiert.

Etwa ganz anderes ist ein Benzindirekteinspritzer. Dort wird das Benzin direkt in den Brennraum eingespritzt. Diese Motoren besitzen ebenfalls eine Zündkerze. Man kann allerdings das Verdichtungsverhältnis über 10:1 erhöhen, da reine Luft komprimiert wird. Diese Motoren haben sehr

hohe Wirkungsgrade. Hier könnte die Zukunft der Benzinmotoren liegen.

Modell:

1. Kurbelgehäuse
2. Kurbelwelle, leitet die Drehbewegung zum Getriebe
3. Nockenwelle, öffnet und schliesst die Ventile zur richtigen Zeit. Die Nockenform bestimmt die Leitungskurve mit
4. Ventilstößel
5. Einlassventil, während des Ansaugtaktes offen, sonst geschlossen; schliesst den Brennraum gasdicht ab
6. Ansaugkanal, gasförmiges Luft-Benzin-Gemisch strömt hier durch
7. Vergaser, mit Schwimmer (gelb) sorgt für die richtige Dosierung des Brennstoffgemisches; dies wird heute von der Einspritzanlage übernommen
8. Benzinzufuhr
9. Luftzufuhr
10. Zündkerze, der richtige Zündzeitpunkt bestimmt wesentlich die Leistung des Motors
11. Zylinderdeckel
12. Kolben, schliesst den Brennraum gasdicht aber beweglich ab
13. Pleuelstange, bewegt die lineare Kolbenbewegung auf eine drehende der Kurbelwelle
14. Auslasskanal, zum Auspuff
15. Auslassventil, offen im 4. Takt
16. Zylinder

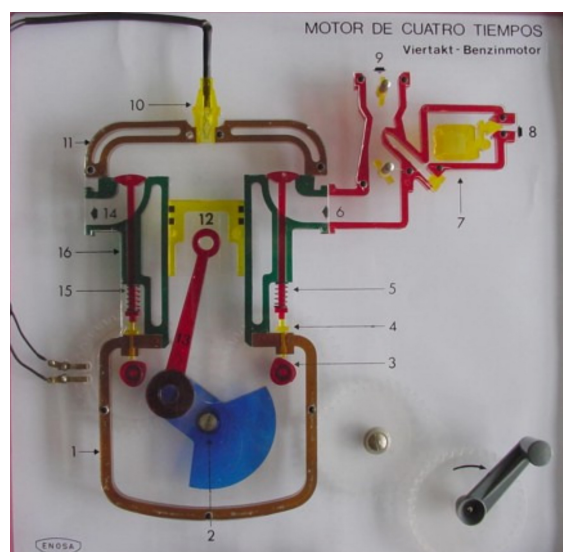


Abbildung 10.4.5: Viertakt-Benzinmotor (Modell)

10.4.4 Viertakt-Dieselmotor

1. Takt: Ansaugtakt

Der Kolben bewegt sich nach unten. Das Einlassventil ist geöffnet. Durch die Abwärtsbewegung wird reine Luft angesaugt. Die Luft strömt in den Zylinder. Das Einlassventil wird geschlossen, wenn der Kolben unten ist (unterer Totpunkt, UT).

2. Takt: Verdichten, Kompressionstakt

Der Kolben bewegt sich wieder nach oben. Alle Ventile sind geschlossen. Die Luft wird komprimiert.

3. Takt: Arbeitstakt

Kurz bevor der Kolben zuoberst ankommt (oberer Totpunkt, OT) wird zu der komprimierten (und dadurch erwärmten) Luft eine genau dosierte Menge Dieselmotorenstoff direkt in den Brennraum eingespritzt. Das Gemisch entzündet sich selbständig: Der Dieselmotor wird auch „Selbstzunder genannt“. Die freiwerdende Energie erwärmt das Gas. Das Gas dehnt sich aus, der Kolben wird nach unten geschoben (alle Ventile sind geschlossen). Arbeit wird geleistet. Die Pleuelstange überträgt die Kraft auf die Kurbelwelle: eine Drehbewegung entsteht. Der bei diesem Takt gewonnene „Schwung“ reicht für die anderen 3 Takte.

4. Takt: Ausstossen

Das Auslassventil öffnet sich ungefähr, wenn der Kolben im unteren Totpunkt ist. Bei der Aufwärtsbewegung des Kolbens wird das verbrannte Gemisch durch das Auslassventil in den Auspuff entlassen. Das Gas enthält immer noch einiges an Wärmeenergie. Wenn der Kolben oben ist (oberer Totpunkt) schliesst sich das Auslassventil und das Einlassventil öffnet sich: weiter mit dem 1. Takt.

Der Wirkungsgrad eines Verbrennungsmotors hängt davon ab, wieviel von der freiwerdenden Verbrennungsenergie an den Kolben abgegeben werden kann. Je heisser die Auspuffgase sind, umso schlechter: Energie verpufft ungenutzt in die Umwelt. Man nutzt entweder die heissen Auspuffgase mit einem Turbo oder sorgt dafür, dass sich das Gas im Zylinder möglichst weit ausdehnen (und damit abkühlen) kann. Das Verhältnis zwischen Volumen im Zylinder im OT und Volumen im Zylinder im UT nennt man Verdichtungsverhältnis. Je grösser dieses Verhältnis ist umso höher der Wirkungsgrad.

Das Verdichtungsverhältnis ist bei einem Benzinmotor etwa 10:1 und bei einem Dieselmotor etwa 20:1. Wir erwarten also für Dieselmotoren einen höheren Wirkungsgrad. Bei Dieselmotoren kann ein höheres Verdichtungsverhältnis realisiert werden, weil die nicht-brennbare reine Luft während des 2. Takts (Verdichten von 20 auf 1) nicht selbständig explodieren kann, bevor der Diesel zugegeben wird.

Vorteile des Diesels:

- Höherer Wirkungsgrad als beim Benzinmotor
- Guter Drehmomentverlauf bei tiefen Tourenzahlen

Nachteile des Diesels:

- Es ist nicht möglich, wie beim Benzinmotor den Zündpunkt zeitlich genau festzulegen. Der Diesel muss eingespritzt werden, was bereits ein Zeitfenster benötigt. Aus diesem Grund laufen Dieselmotoren nicht bei hohen Tourenzahlen.
- Es wird viel Russ ausgestossen

Heute werden jedoch Russfilter serienmässig eingebaut, was die Vorteile des Dieselmotors erhöht und umweltfreundlicher macht.

Modell:

1. Kurbelgehäuse (braun)
2. Kurbelwelle (blau): leitet die Drehbewegung Richtung Getriebe.
3. Nockenwelle (rot): Die Nocke öffnet die Ventile, welche durch eine Feder wieder geschlossen werden. Die Nockenform bestimmt die Leistungskurve mit.
4. Ventilstössel (gelb)
5. Einlassventil (rot): während dem Ansaugtakt geöffnet, sonst geschlossen, schliesst den Brennraum gasdicht ab.
6. Ansaugkanal: Hier strömt die reine Luft in den Brennraum.
7. Luftfilter (gelb)
8. Glühkerze (gelb): Wird nur während des Startvorganges benötigt. Nachher explodiert das Gemisch selbständig.
9. Wirbelkammer: Der eingespritzte Dieselkraftstoff wird hier verwirbelt.
10. Dieseleinspritzung (blau): spritzt mehr oder weniger kurz bevor der Kolben im oberen Totpunkt ist, den Dieselkraftstoff in die komprimierte Luft. Das Gemisch entzündet sich dadurch selbständig.
11. Zylinderdeckel (braun)
12. Kolben (gelb): schliesst den Brennraum gasdicht aber beweglich ab.
13. Pleuelstange (rot): überträgt die lineare Bewegung des Kolbens auf die drehende Kurbelwelle.
14. Auslasskanal Richtung Auspuff: hier werden die verbrannten Gase ausgestossen.
15. Auslassventil (rot): geöffnet, wenn Gase ausgestossen werden (4. Takt).
16. Zylinder (grün)
17. Dieseleinspritzpumpe (rot): Die Nocke (grün) bestimmt den Einspritzzeitpunkt. Moderne Dieselmotoren arbeiten mit elektrischen Systemen, welche elektronisch gesteuert die Einspritzmenge und den Zeitpunkt besser anpassen können

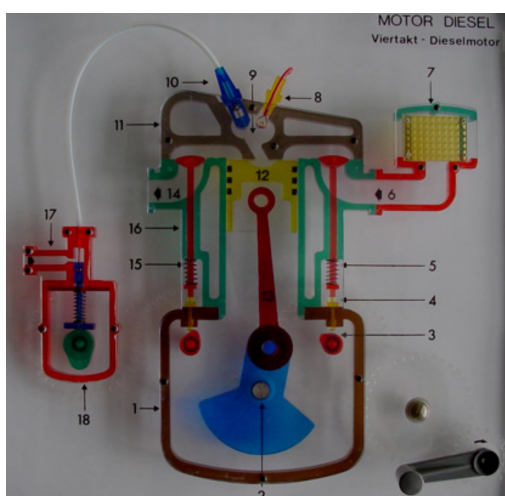


Abbildung 10.4.6: Viertakt-Dieselmotor (Modell)

V Optik

Optik kommt aus dem Griechischen und bedeutet die Lehre des Sichtbaren. Im übertragenen Sinne also die Lehre des Lichts. Unter Licht versteht man im Allgemeinen den sichtbaren Teil des elektromagnetischen Spektrums, also ca. von 400nm bis 750nm Wellenlänge.

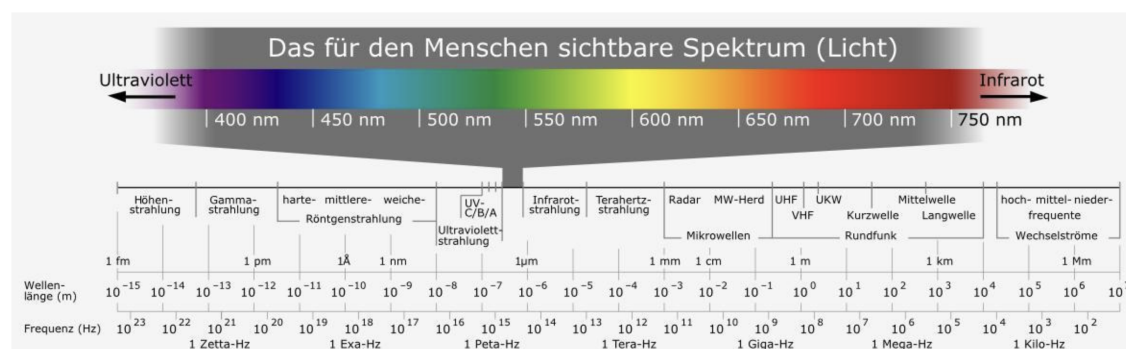


Abbildung 10.4.7: Sichtbare Spektrum von Licht

Licht wird auch als **elektromagnetische** Welle bezeichnet, gehört also in den Bereich der Elektrizitätslehre. Licht hat aber auch Teilcharakter (z.B. Photoelektrischer Effekt), sodass Licht duale Eigenschaften aufweist (Welle-Teilchen-Dualismus). Man nennt die Licht *teilchen* **Photonen**. Ein Photon hat die Energie...

$$E = h \cdot f = \hbar \cdot \omega \quad (10.4.9)$$

mit:

- h das PLANCK'sche Wirkungsquantum $h = 6.6261 \cdot 10^{-34} Js$
- f die Frequenz in Hertz [f] = Hz
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (sprich: „h-quer“)
- ω die Kreisfrequenz des Lichtes $\omega = f \cdot 2\pi$, [ω] = s^{-1}
- E die Energie eines Photons in Joule [E] = J

Der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge des Lichtes erfolgt über die (Vacuum-) Lichtgeschwindigkeit $c = 2.9979 \cdot 10^8 m/s$ (*celeritas*):

$$c = f \cdot \lambda \quad (10.4.10)$$

Somit hat grünes Licht mit einer Wellenlänge $\lambda = 550nm$ ($550 \cdot 10^{-9}m$) eine Frequenz $f = \frac{c}{\lambda} = 5.45 \cdot 10^{14}Hz$.

Man unterscheidet zwei klassische Teilbereiche der Lichtausbreitung: Die **Wellenoptik** und die **geometrische Optik**. Grundlage der Wellenoptik ist die Wellennatur des Lichts. Die Gesetzmässigkeiten der geometrischen Optik gelten für den Fall, dass die Abmessungen des optischen Systems sehr gross sind gegenüber der Wellenlänge des Lichts. Wir werden in diesem Kurs nur die geometrische Optik betrachten.

Aufgaben:

1. Bestimme die Energie eines blauen, eines grünen und eines roten Photons. Lies die Wellenlängen aus vorgehender Graphik ab.

$$\begin{aligned}
 E &= h \cdot \frac{c}{\lambda} \\
 E_{\text{blau}} &= h \cdot \frac{c}{450 \cdot 10^{-9}} = 4.4174 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
 E_{\text{grün}} &= h \cdot \frac{c}{550 \cdot 10^{-9}} = 3.614 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
 E_{\text{rot}} &= h \cdot \frac{c}{700 \cdot 10^{-9}} = 2.840 \cdot 10^{-19} \text{ J}
 \end{aligned}
 \tag{10.4.11}$$

2. Die sog. **Solarkonstante** gibt an, wieviel Sonnenenergie pro Zeit und pro Fläche auf der Erde ankommt². Sie beträgt $S_{\odot} = 1.39 \text{ kW/m}^2$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, das Sonnenlicht bestünde nur aus grünen Photonen mit der Wellenlänge $\lambda = 550 \text{ nm}$. Wieviele Photonen pro Sekunde treffen dann auf einem Quadratmeter der Erde ein und wieviele Photonen pro Sekunde emittiert die Sonne dann insgesamt? (Die Distanz Sonne-Erde, die sog. astronomische Einheit (AE oder AU) beträgt $1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$).

$$\begin{aligned}
 S_{\odot} &= \frac{P}{A} = \frac{E}{t \cdot A} \\
 &\Rightarrow \frac{n \cdot hf}{t \cdot A} \quad n \text{ hinzufügen, weil mehr als ein Photon} \\
 &= \frac{nh \cdot c}{tA \cdot \lambda} \\
 n &= \frac{S_{\odot} t A \lambda}{hc} = \frac{1390 \text{ W/m}^2 \cdot 1 \text{ s} \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \underline{\underline{3.85 \cdot 10^{21} \text{ Photonen}}}
 \end{aligned}
 \tag{10.4.12}$$

$$\begin{aligned}
 N &= 4\pi r^2 \cdot n \\
 &= 4\pi (1.496 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 3.85 \cdot 10^{21} = \underline{\underline{1.0816 \cdot 10^{45} \text{ Photonen}}}
 \end{aligned}$$

²Energie pro Fläche und pro Zeit ist Leistung pro Fläche. Dies nennt man **Intensität**

11 Geometrische Optik

In der geometrischen Optik beschreibt man die Ausbreitung von Licht entlang vieler feiner Lichtstrahlen, welche wie mathematische Strahlen betrachtet werden³. Man spricht dann auch von **Lichtbündeln**.

Bemerkung:

- Direkte Lichtquellen: Sonne, Lampen, Sterne... (sie erzeugen Licht)
- Indirekte Lichtquellen: Mond, Planeten, Himmel, Bäume, Erde... (sie reflektieren Licht)
- Lichtsensoren: Augen (Natur), Photofilm (chemisch), CCD-Sensor in Digitalkameras (physikalisch)
- Im Vakuum breitet sich Licht immer und für jeden Beobachter mit der Geschwindigkeit $c = 2.9979 \cdot 10^8 m/s \approx 3 \cdot 10^8 m/s$ aus (Lichtgeschwindigkeit).

11.1 Die Lichtgeschwindigkeit c

Jede elektromagnetische Strahlung, also auch sichtbares Licht, breitet sich im Vacuum mit konstanter Geschwindigkeit $c = 2.9979 \cdot 10^8 m/s$ aus. Dies gilt auch für Radio-, Mikrowellen-, UV- oder Röntgenstrahlen.

Bemerkung: Für praktische Rechnungen kann mit einer Lichtgeschwindigkeit von...

$$c = 3 \cdot 10^8 m/s \quad (11.1.1)$$

...gerechnet werden.

Beispiel: Die Funkkommunikation der Astronauten, die auf dem Mond landeten, mit der Bodenzentrale in Florida erlitt eine natürlich Verzögerung durch die Distanz Erde-Mond (ca. $3.84 \cdot 10^8 m$). Die Laufzeit betrug. $\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{3.84 \cdot 10^8 m}{3 \cdot 10^8 m/s} = \underline{1.28 s}$.

Aufgaben:

1. Astronomische Entfernungen werden oft in Lichtjahren ly gemessen, also der Strecke, welche das Licht in einem Jahr zurücklegt. Wie lang ist ein Lichtjahr?

$$3 \cdot 10^8 m \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = \underline{9.4608 \cdot 10^{15} m} \quad (11.1.2)$$

2. Wieviele Lichtjahre ist Proxima Centauri (nächster Stern) von uns entfernt, wenn die Distanz zu Proxima Centauri $4.0142 \cdot 10^{16} m$ beträgt?

$$1 : (9.4608 \cdot 10^{15}) \cdot (4.0142 \cdot 10^{16}) = \underline{4.243 ly} \quad (11.1.3)$$

3. Wie lang braucht das Sonnenlicht bis zur Erde?

$$1 : (3 \cdot 10^8) \cdot (1.496 \cdot 10^{11}) = 498.67 s \Rightarrow \underline{8.31 min} \quad (11.1.4)$$

Breitet sich elektromagnetische Strahlung in einer *Materie* aus, dann ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner als die im Vacuum nämlich...

$$c_n = \frac{c}{n} \quad (11.1.5)$$

³Mathematische Strahlen sind Geraden mit einem Anfangspunkt.

mit:

- c der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum
- n dem dimensionslosen **Berechnungsindex** des entsprechenden Materials, $n > 1$ und $n = 1$ für Vacuum
- c_n der Ausbreitungsgeschwindigkeit in der entsprechenden Materie

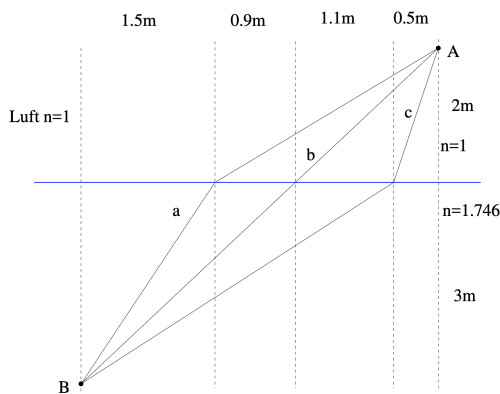
Beispiel: Der Berechnungsindex von Wasser beträgt etwa $n_{\text{Wasser}} = \frac{4}{3}$. Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Wasser $c_{\text{Wasser}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{2.25 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$, also deutlich langsamer als im Vacuum!

Das Prinzip von Fermat: Der französische Mathematiker Pierre de Fermat hat im 17. Jahrhundert folgenden Satz aufgestellt:

Der Weg, den das Licht beschreibt, um von Punkt A zu Punkt B zu gelangen, ist stets so, dass die dafür benötigt Zeit **minimal** wird.

Bemerkung: Es geht hier um die Laufzeit nicht um die Laufstrecke.

Aufgabe: Bestimme die theoretischen Laufzeiten der drei möglichen Wege a, b, oder c von A nach B folgender Graphik. Welchen Weg würde das Licht nach dem Prinzip von Fermat am ehesten wählen?



$$v = c_n = \frac{c}{n}$$

$$\Delta t = \frac{s}{v} \Rightarrow \frac{s}{\frac{c}{n}} = \frac{ns}{c} \tag{11.1.6}$$

$$a \hat{=} \Delta t = 3.019 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$b \hat{=} \Delta t = 3.090 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$c \hat{=} \Delta t = 3.370 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Ergo ist a die richtige Lösung!

Skizze 11.1: Geometrische Optik (Aufgabe)

11.2 Reflexion und Brechung

Experiment: Ein Laserstrahl trifft schräg auf die Oberfläche eines Quaders Plexiglas.

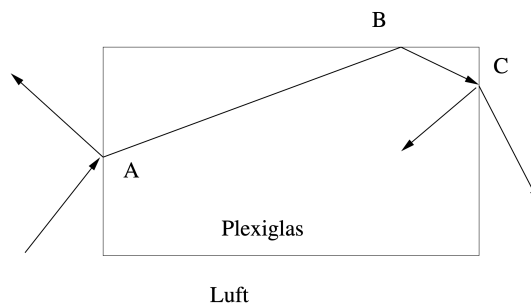


Abbildung 11.2.1: Geometrische Optik (Experiment)

An den Trennflächen von zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes kann ein Lichtstrahl reflektiert (A, B, C) und / oder gebrochen werden (A, C). Falls ein Lichtstrahl nur reflektiert wird und keine Komponente gebrochen wird, spricht man von **Totalreflexion** (B). Totalreflexion ist nur möglich von optisch dichterem zu optisch dünnerem Material.

11.2.1 Das Reflexionsgesetz

Trifft ein Lichtstrahl eine Oberfläche unter einem Winkel α (zum Lot), so wird zumindest ein Teil davon reflektiert.

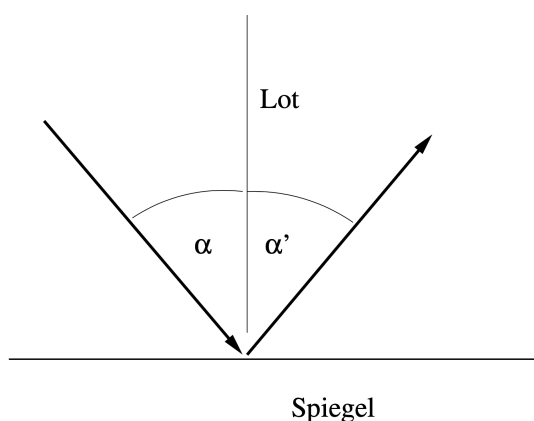
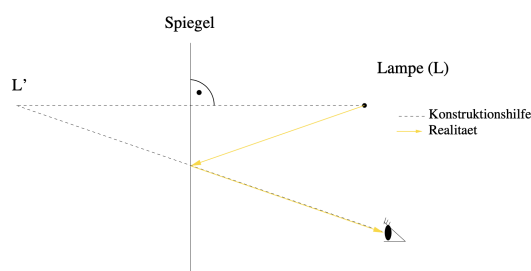


Abbildung 11.2.2: Reflexion an einem ebenen Spiegel

Es gibt: Einfallswinkel = Ausfallswinkel ($\alpha = \alpha'$), welche **am Lot** gemessen werden.

Beispiel: Wir konstruieren den von L ausgehenden Strahl, welcher via Spiegel das Auge trifft.

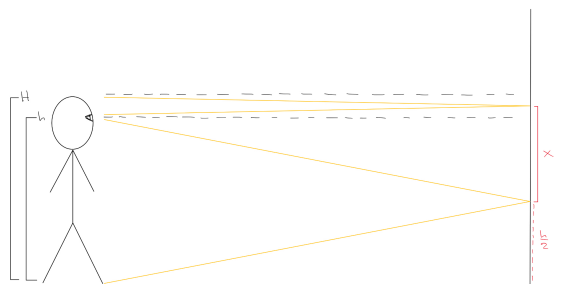


Skizze 11.2: Geometrische Optik (Beispiel)

Aufgabe: Ein Mensch der Höhe H hat die Augen auf der Höhe h und möchte sich ganz in einem ebenen Wandspiegel betrachten. Wie hoch muss der Spiegel sein, und in welcher Höhe ab Boden muss man die Unterkante des Spiegels montieren?

$$x = H - \frac{H-h}{2} - \frac{h}{2} = H - \frac{H}{2} + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} = \underline{\underline{\frac{H}{2}}} \quad (11.2.1)$$

Spiegelhöhe ist $x = \frac{H}{2}$ und die Höhe ab Boden ist $\frac{h}{2}$ (siehe Skizze).



Skizze 11.3: Geometrische Optik (Aufgabe)

11.2.2 Das Brechungsgesetz von Snellius

Trifft Licht auf die Grenzfläche von zwei optischen Medien (n_1 und n_2), so wird im Allgemeinen ein Teil *reflektiert* und ein Teil *gebrochen*.

Experiment: Wir betrachten die Grenzfläche von Luft und Glas.

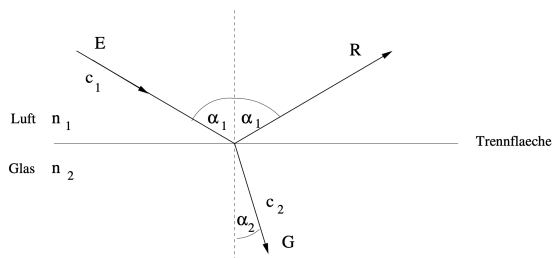


Abbildung 11.2.3: Geometrische Optik (Experiment)

Bildlegende:

- E: einfallender Strahl
- R: reflektierter Strahl
- G: gebrochener Strahl
- α_1 : Einfalls- und Reflexionswinkel
- α_2 : Brechungswinkel

Für verschiedene Einfallswinkel α_1 messen wir den dazugehörigen Brechungswinkel α_2 :

α_1 [°]	10	20	30	40	50	60	70	80	88
α_2 [°]	7	13	20	26	31	35.5	39	40.5	42
$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}$	1.42	1.52	1.46	1.47	1.49	1.49	1.49	1.52	1.49

Abbildung 11.2.4: Einfallswinkel und Brechungswinkel

$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \dots = \text{konstant!}$ Die Konstante ist von den zwei Materialien, welche die Grenzfläche bilden, abhängig.

Gesetz von Snellius:

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\alpha_2) \quad (11.2.2)$$

bzw. $\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_2}{c_1}$ mit:

- α_i : Winkel zwischen Lichtstrahlen und Lot auf die Trennfläche
- n_i : Brechungsindizes der Materialien⁴, Vakuum: $n = 1$, Luft: $n = 1.0003 \approx 1$
- c_i : Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im jeweiligen Medium

Beispiel: Ein Lichtstrahl trifft von Luft her kommend auf die ebene Wasseroberfläche unter einem Winkel $\alpha_1 = 60^\circ$. Wie gross ist α_2 und wie schnell bewegt sich das Licht im Wasser? ($n_{\text{Wasser}} = \frac{4}{3}$)

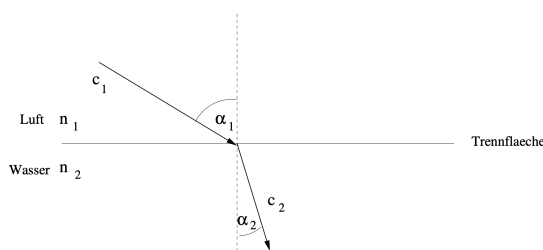


Abbildung 11.2.5: Geometrische Optik (Beispiel)

Aus Snellius folgt:

$$\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha_1) \Rightarrow \alpha_2 = 40.51^\circ \quad (11.2.3)$$

und aus $c_W = \frac{c}{n_W} = 2.25 \cdot 10^8$ m/s.

Aufgabe: Ein Taucher richtet den Strahl seiner Taschenlampe unter a) 30° , b) 60° gegen das Lot der Wasseroberfläche. Wie gross ist der Brechungswinkel in beiden Fällen? ($n_W = \frac{4}{3}$)

a)

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \sin(30^\circ) &= 1 \cdot \sin(\alpha_2) \\ \alpha_2 &= \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx \underline{\underline{41.8^\circ}} \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \sin(60^\circ) &= 1 \cdot \sin(\alpha_2) \\ \alpha_2 &= \arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \zeta \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

11.2.3 Totalreflexion

Totalreflexion kann auftreten, wenn ein Strahl vom optisch dichteren „1“ ins optisch dünnere „2“ Medium übergehen möchte ($n_1 > n_2$). Dazu muss der Brechungswinkel α_2 grösser als 90° sein. Bedingung an den Einfallswinkel α_1 für den Grenzfall mit $\alpha_2 = 90^\circ$:

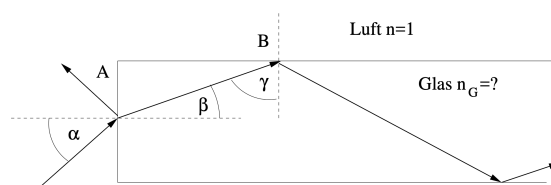
$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1) &= \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(90^\circ) = \frac{n_2}{n_1} \\ \alpha_1 &= \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

⁴Die Brechzahlen sind wellenlängenabhängig

Beispiel für Wasser: $\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right) = 48.6^\circ$. Wenn man also mit einem Lichtstrahl unter einem Winkel $\alpha \geq 48.6^\circ$ vom Wasser rausstrahlt, so verlässt kein Licht das Wasser. Es wird totalreflektiert.

Experiment: Totalreflexion in Wasser

Aufgabe: Lichtleiter: Alle ($\alpha \rightarrow 90^\circ$) Strahlen, die an der linken Stirnfläche eintreten, sollten durch Totalreflexion weitergeleitet werden. Wie gross muss n_G (oder n_1) mindestens sein? Tipp: Zuerst mit α rechnen, dann $\alpha \rightarrow 90^\circ$.



Skizze 11.4: Geometrische Optik (Aufgabe)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \\
 \sin(a_1) &= \frac{n_2}{n_1} \\
 n_1 &= \frac{n_2}{\sin(a_1)} \\
 n_1 &= \frac{1}{\sin(45^\circ)} \\
 &= \underline{\underline{\sqrt{2}}} \approx 1.41 \\
 n_G &\geq \sqrt{2} \cdot n_L = \sqrt{2}
 \end{aligned}
 \tag{11.2.7}$$

11.3 Abbildung mit Linsen

Durchläuft ein Lichtstrahl eine Linse, so wird er zweimal gebrochen, nämlich an beiden Oberflächen der Linse:

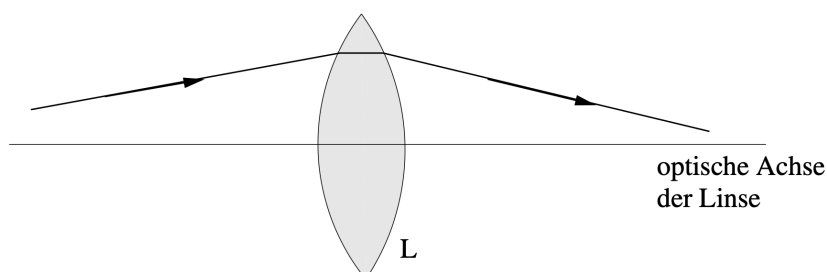


Abbildung 11.3.1: Brechung eines Lichtstrahles an den beiden Oberflächen einer Linse

Für optische Abbildungen werden die Linsen so konstruiert, dass parallel zur optischen Achse einfallende Lichtstrahlen sich in einem Punkt auf der optischen Achse schneiden. Diesen Punkt nennt

man **Brennpunkt F** (Fokus). Die Distanz des Brennpunktes zur Linse nennt man die **Brennweite f** der Linse. f hängt von der Geometrie der Linse und vom Material der Linse ab.

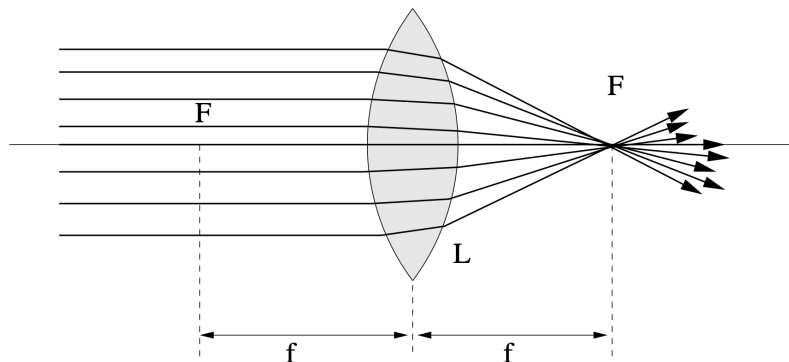


Abbildung 11.3.2: Paralleles Licht schneidet sich im Brennpunkt F

11.3.1 Konstruktion von Linsenabbildungen, spezielle Strahlen

Wenn Strahlen auf eine Linse treffen, dann kann man von drei dieser Strahlen den Verlauf sofort angeben:

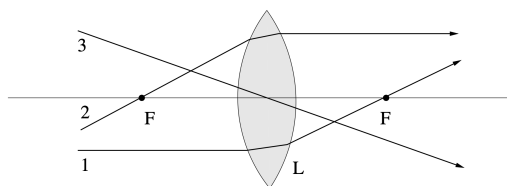


Abbildung 11.3.3: Die 3 Leitstrahlen bei einer Linsenabbildung

vor der Linse	nach der Linse	Strahl
parallel zur Achse	durch F	1
durch F gezielt	parallel zur Achse	2
durch Linsenzentrum gezielt	läuft geradeaus weiter	3

Abbildung 11.3.4: Die 3 Leitstrahlen vor und nach der Linse

Hat man nun einen Gegenstand auf der einen Seite der Linse, z.B. eine Lampe G , dann gehen vom Gegenstand unendlich viele Lichtstrahlen aus. Alle Lichtstrahlen, welche die Linse treffen werden auf die Bildseite der Linse abgebildet und ergeben das Bild B . Um der Ort von B zu konstruieren, bedient man sich der 3 Leitstrahlen:

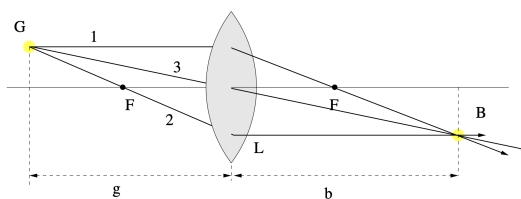


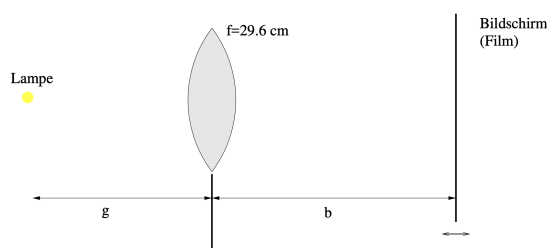
Abbildung 11.3.5: Konstruktion des Bildes mithilfe der 3 Leitstrahlen

Wie man sieht, zeichnet man nur noch eine Brechung in der Mitte der Linse.

Man nennt g die Gegenstandsweite und b die Bildweite. es reichen im Prinzip bereits zwei der drei Leitstrahlen. Man wählt immer Strahl 1 und Strahl 2, um aus dem Gegenstand G das Bild B zu konstruieren.

Was passiert mit all den anderen Strahlen, welche vom Gegenstand ausgehen? Mit einem Experiment sieht man, dass alle anderen Strahlen sich auch in B treffen.

Experiment: Alte 100V-Strassenlampe und Linse: Der Schirm kann verschoben werden, so dass sich alle Strahlen in einem Punkt treffen (scharfes Bild!).



Skizze 11.5: Geometrische Optik (Experiment)

Gegeben sei eine Linse mit Brennweite f und ein Gegenstand der Grösse G im Abstand g von der Linse. Konstruiere das Bild B :

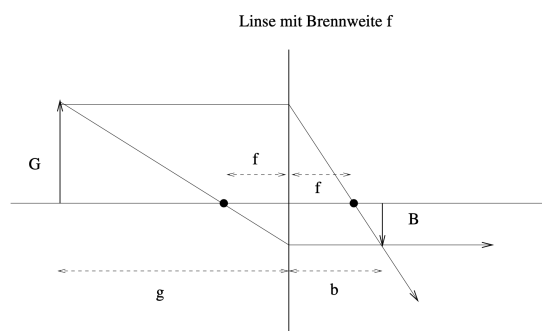


Abbildung 11.3.6: Konstruktion einer Abbildung eines Gegenstandes G durch eine Linse mit Brennweite f

Durch diese Konstruktion kann man sofort die Bildgrösse B und die Bildweite b abmessen.

11.3.2 Die Linsengleichung

Daraus ergibt sich die sog. **Linsengleichung**:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (11.3.1)$$

VI Elektrizität und Magnetismus

Elektrizität im engeren Sinne ist erst im 20. Jahrhundert für einen Grossteil der Menschen zugänglich geworden. Jedoch kannten bereits die Griechen im Altertum elektrische Erscheinungen. Ihnen war aufgefallen, dass Bernstein nach Reibung Federn und Stroh anzog. Das Wort Elektrizität *Elektron*, dem griechischen Wort für Bernstein.

Unter Elektrizität versteht man heute allgemein die mit elektrischen Ladungen und elektrischen Strömen verknüpften Effekte und Phänomene. Neben der Elektrizität gibt es das ebenso grosse wie wichtige Gebiet des *Magnetismus*. Es war in erster Linie das Verdienst von James Clerk Maxwell in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, zu zeigen, dass elektrische und magnetische Erscheinungen den selben Ursprung haben. Er fasste beide Gebiete zum *Elektromagnetismus* zusammen. Die Theorie des Elektromagnetismus nennt man *Elektrodynamik*.

Alle Kräfte, welchen wir im Alltag begegnen haben entweder ihren Ursprung in der Gravitation oder im Elektromagnetismus. So fällt ein Apfel wegen der Gravitation auf den Boden, jedoch sind die elektrischen Kräfte Schuld daran, dass die Äste eines Baumes nach oben gerichtet sind, obwohl die Gravitation nach unten zieht, und ein Berg seine Form beibehält und nicht aufgrund der Gravitation zu einem flachen Hügel zerfliesst. Alle chemischen und die meisten biologischen Effekte haben ihren Grund in der Elektrizität. Lediglich in den sehr kleinen ($10^{-10}m$) und sehr grossen Bereichen (10^2m) dominieren die starke und die schwache Wechselwirkung bzw. die Gravitation.

Man unterteilt die Elektrodynamik in verschiedene Untergebiete:

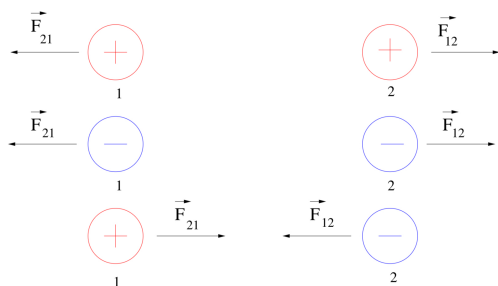
- Elektrostatik: zeitlich unveränderliche Phänomene
- Gleichströme: zeitlich verändernde Ladungsverteilungen, jedoch statische elektrische Felder
- Wechselströme: zeitlich verändernde Ladungsverteilungen und elektrische Felder
- Magnetostatik: zeitlich unveränderliche Magnetfelder
- Elektrodynamik (im engeren Sinne): elektrische und magnetische Felder verändern sich zeitlich, Zusammenhang mit der Optik

12 Elektrostatik

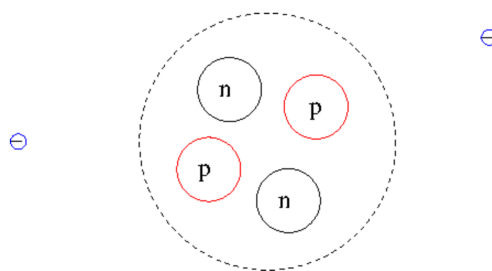
In diesem Kapitel geht es um elektrische Phänomene, welche auf ruhenden elektrischen Ladungen basieren (im Gegensatz zu bewegten Ladungen \rightarrow Ströme).

12.1 Die elektrische Ladung Q

Reiben wir einen Plastikstab an einem Fell (beides Isolatoren), so vermag der Stab kleine Papierschnipsel anzuziehen. Es gibt also eine Kraft. Der Stab ist elektrisch geladen.



Skizze 12.1: Elektrostatik (Theorie)



Skizze 12.2: Elektrostatik (Theorie)

- Es gibt zwei Arten von elektr. Ladungen: positiv + und negativ -
- Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an
- Das Symbol der elektr. Ladung ist Q oder manchmal auch q
- Die SI-Einheit der elektr. Ladung ist das *Coulomb* C benannt nach dem französischen Physiker Charles Auguste de Coulomb
- Sitz der Ladung: Atome.
 - + Ladungen im *Atomkern* (Protonen)
 - - Ladungen im *Atomhülle* (Elektronen)
- Der Ladungsbetrag von Elektron (e^-) und Proton (p^+) ist genau gleich:
Ladung Proton = | Ladung Elektron | = Elementarladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}C$
- Alle in freier Natur vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache von e , $Q = z \cdot e$ mit $z \in \mathbb{Z}$
- Materialien, auf welchen sich die Ladungen bewegen können heißen *elektrische Leiter* (Metalle, Brunnenwasser (Wasser + Ionen), Plasma, ...). Auf *Isolatoren* sind alle Ladungen an ihren Ort gebunden (Glas, Keramik, Plastik, trockenes Holz, destilliertes Wasser, ...)
- Ein ungeladener (elektr. neutraler) Gegenstand enthält gleichviel + wie - Ladungen. Die Ladung eines Körpers entspricht dem *Überschuss* der einen oder anderen Sorte von Ladungen.

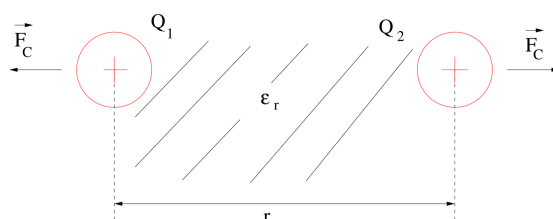
Beispiel: Ein neutrales Eisenatom hat 26 Protonen im Kern und 26 Elektronen in der Hülle. Durch Ionisation können dem Eisenatom Elektronen entrissen werden. In einem Gedankenexperiment seien einem Eisenatom durch Ionisation zwei Elektronen entrissen worden. Bestimme die Ladung des Eisenatoms.

$$\begin{aligned} \text{Vorher: } Q &= 26e + 26(-e) = 0 \\ \text{Nachher: } Q &= 26e + 24(-e) = 2e = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}C = \underline{\underline{3.2 \cdot 10^{-19}C}} \end{aligned} \quad (12.1.1)$$

12.2 Das Gesetz von Coulomb

Da sich gleiche Ladungen abtossen und ungleiche anziehen muss eine Kraft wirken: die **Coulombkraft** \vec{F}_C . Der Betrag der Coulombkraft F_C :

- die Beträge der Einzelladungen $|Q_1|, |Q_2|$
- die Distanz zwischen den beiden Ladungszentren r (für kugelförmige Ladungen)
- umgebendes Material: berücksichtigt durch die Materialkonstante ϵ_r (Dielektrizitätszahl)



Skizze 12.3: Elektrostatik (Theorie)

Es gilt das Coulomb-Gesetz:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} \quad (12.2.1)$$

mit:

- F_C dem Betrag der Coulombkraft, $[F_C] = N$
- $|Q_1|, |Q_2|$ den Beträgen der beiden Ladungen, $[Q_i] = C$
- r der Distanz zwischen den beiden (kugelförmigen) Ladungen (Zentrum-Zentrum), $[r] = m$
- $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$
 - ϵ_0 der elektrischen Feldkonstante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{m^2 N}$
 - ϵ_r der (relativen) Dielektrizitätszahl (Vacuum: $\epsilon_r = 1$, Luft: $\epsilon_r = 1.0006 \approx 1$, Polyvinylchlorid (PVC): $\epsilon_r = 6.1$, Wasser: $\epsilon_r = 80$)

Wenn keine näheren Angaben gemacht werden, befinden sich die Ladungen immer im Vacuum oder in der Luft, und man darf $\epsilon_r = 1$ setzen.

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ kann man zusammenfassen zu $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ woraus das Coulombgesetz für $\epsilon_r = 1$ lautet:

$$F_C = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} \quad (12.2.2)$$

Ein Coulomb ist eine grosse Menge an Ladung. Wir berechnen die Kraft zwischen zwei Ladungen von je einem Coulomb in einem Meter Entfernung:

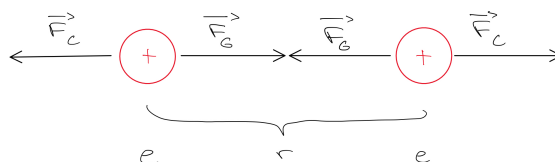
$$F_C = k \cdot \frac{1C \cdot 1C}{(1m)^2} = 9 \cdot 10^9 N \quad (12.2.3)$$

Aufgabe: Wie viele Eisenatome müsste man nach obigen Vorgehen (vgl. Beispiel) ionisieren, damit ein Coulomb Ladung zusammenkommt und welcher Masse entspräche dies?

$$\begin{aligned} N &= \frac{Q}{Z \cdot e} \Rightarrow N_{1x} = \frac{1}{2e} = \underline{\underline{3.12 \cdot 10^{18}}} \text{ Atome} \\ N_v &= \frac{1}{26e} = \underline{\underline{2.40 \cdot 10^{17}}} \text{ Atome} \\ \frac{N}{N_A} &= \frac{m}{M} \Rightarrow m_{1x} = \frac{N_{1x}}{N_A} \cdot M = \underline{\underline{2.89 \cdot 10^{-4} kg}} \\ m_v &= \frac{N_v}{N_A} \cdot M = \underline{\underline{2.23 \cdot 10^{-5} kg}} \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Beispiele:

- Wir vergleichen die Coulombkraft mit der Gravitationskraft jeweils zwischen zwei Protonen.



Skizze 12.4: Elektrostatik (Beispiel)

Das Verhältnis wird gesucht:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}}{G \frac{m_1 m_2}{r^2}} = \frac{k \cdot e \cdot e}{G \cdot m_p \cdot m_p} = \frac{ke^2}{Gm_p^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} (1.6 \cdot 10^{-19} C)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} (1.67 \cdot 10^{-27} kg)^2} = \underline{\underline{1.24 \cdot 10^{36}}} \quad (12.2.5)$$

Die Coulombkraft ist die zweite Fundamentalkraft im Universum

- Die Ladungen sind in der Natur perfekt ausgeglichen. Wir überprüfen diese Aussage mit einem Gedankenexperiment: Angenommen, jede 10^9 -te Sauerstoffatom habe ein Elektron zu wenig (Produktionsfehler). Wie stark würden sich zwei Becher mit je 1.8 dl Wasser (180 g) im Abstand von 20 cm abstossen? ($Q \hat{=}$ Ladung eines Bechers)

$$Q = \underbrace{\# \text{ defekte Atome}}_{N'} \cdot e = N' \cdot e$$

$$N' = \underbrace{\# \text{ Sauerstoff-Atome}}_N \cdot 10^{-9} = N \cdot 10^{-9}$$

$$N = \# \text{ Wassermoleküle im Becher} = \frac{m}{m_{\text{mol}}} \cdot N_A = \frac{180g}{18g/\text{mol}} \cdot N_A = 6.02 \cdot 10^{24} \quad (12.2.6)$$

$$\Rightarrow Q = 6.02 \cdot 10^{24} \cdot 10^{-9} \cdot 1.6 \cdot 10^{-16} C = 9.63 \cdot 10^{-4} C$$

$$\Rightarrow F_C = k \frac{Q \cdot Q}{r^2} = \underline{\underline{2.09 \cdot 10^5 N}}$$

- Ladung auf einem Holundermarkkugelnchen

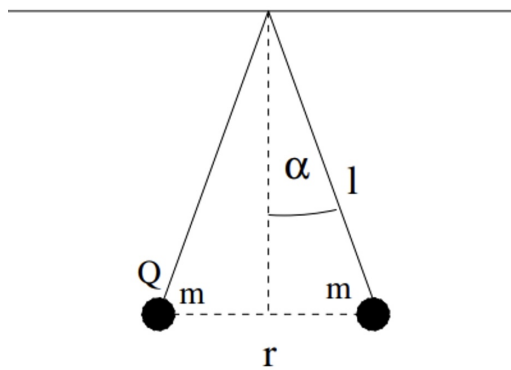
Man misst: $L = 0.28m$, $r = 3cm$, $m = 0.02g$. Man sucht: Q .

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{L}$$

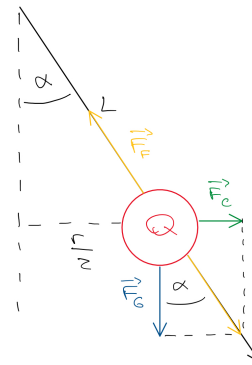
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r}{2L}\right) = 3.07^\circ$$

$$\tan(\alpha) = \frac{F_C}{F_G} = \frac{k \cdot \frac{Q^2}{r^2}}{m \cdot g} \quad (12.2.7)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\tan(\alpha) \cdot mg \cdot r^2}{k}} = Q = \underline{\underline{\pm 1.03 \cdot 10^{-9} C}}$$



Skizze 12.5: Elektrostatik (Beispiel)



Skizze 12.6: Elektrostatik (Beispiel)

12.3 Das elektrische Feld \vec{E}

Ein Feld besteht aus einem Raum, der leer oder mit einem Stoff gefüllt sein kann und einer physikalischen Eigenschaft, die jedem Punkt im Raum eine Grösse zuordnet (Skalar oder Vektor). Diese Eigenschaft nennt man die **Feldgrösse**. Ein Skalarenfeld ist z.B. die Temperaturverteilung über der Schweiz, ein Vektorfeld ist z.B. der Wind über der Schweiz (Stärke und Richtung).



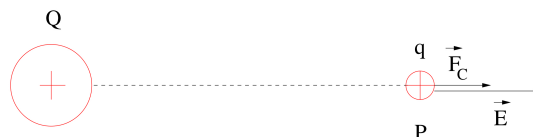
Skizze 12.7: Elektrostatik (Theorie)

Wie wirkt die Ladung Q über weite Entfernungen auf die Ladung q ?

Jede Ladung ist umgeben von ihrem **elektrischen Feld** \vec{E} . Die Ladung ist Ursache ihres Feldes und verändert den sie umgebenden Raum. Eine andere elektrische Ladung q (Probeladung) erfährt in diesem Feld eine Coulombkraft \vec{F}_C . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Feldinformation ist die Lichtgeschwindigkeit. Es reicht theoretisch unendlich weit.

Die felderzeugende Ladung wird meistens mit Q und die **Testladung** oder **Probeladung** mit q bezeichnet.

Definition der elektrischen Feldstärke E im Punkt P :



Skizze 12.8: Elektrostatik (Theorie)

Herrscht im Punkt P ein elektrisches Feld? Wenn ja - wohin zeigt es und wie stark ist es? Vorgehen:

1. Positioniere in P eine kleine positive Probeladung $+q$ („Feldantenne“)
2. Wenn diese Probeladung eine Coulombkraft erfährt, dann herrscht in P ein elektrisches Feld.

3. Die Richtung des elektrischen Feldes ist die gleiche wie jene der Coulombkraft auf die positive Probeladung. (wichtig)
4. Die Stärke (Betrag) des elektrischen Feldes einer Punktladung Q ist:

$$E = \frac{F_C}{|q|} = k \cdot \frac{|Q|}{r^2} \tag{12.3.1}$$

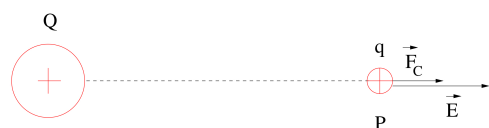
mit der Einheit der elektrischen Feldstärke:

$$[E] = \frac{N}{C} = \left(\frac{V}{M} = \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}} \right) \tag{12.3.2}$$

Somit wird die Coulombkraft zu:

$$F_C = E \cdot |q| \tag{12.3.3}$$

Beispiel: Wir berechnen \vec{E} für die Punktladung $Q = 2\mu C$ (Mikrocoulomb) im Abstand $r = 10cm$. (Die Richtung des Feldes zeigt radial weg von der Ladung.)

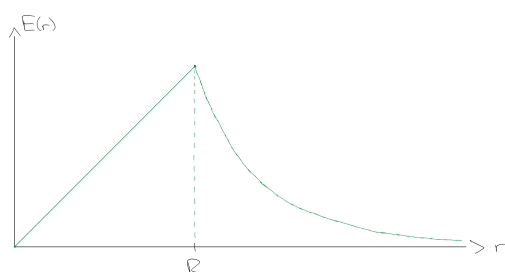


$$E = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} C}{(0.1m)^2} = \underline{\underline{1.8 \cdot 10^6 \frac{N}{C}}} \tag{12.3.4}$$

Skizze 12.9: Elektrostatik (Beispiel)

Ergänzung: Feld einer Metallkugel Ladung Q und Radius R im Abstand r vom Zentrum:

- homogen geladene Vollkugel

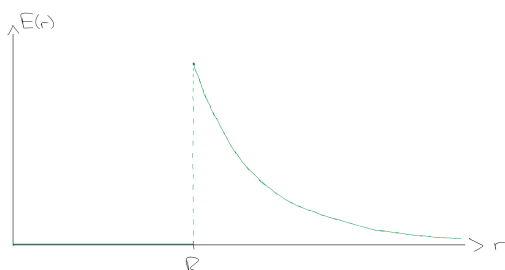


$$E(r) = \frac{k|Q|}{r^2} \quad \text{für } r \geq R$$

$$E(r) = \frac{k|Q|}{R^3} \cdot r \quad \text{für } r \leq R \tag{12.3.5}$$

Abbildung 12.3.1: Elektrisches Feld in der homogen geladenen Vollkugel

- dünne Hohlkugel



$$E(r) = \frac{k|Q|}{r^2} \quad \text{für } r > R$$

$$E(r) = 0 \quad \text{für } r < R \tag{12.3.6}$$

Abbildung 12.3.2: Elektrisches Feld in der dünnen Hohlkugel

Analogien zwischen Gravitation und Elektrizität:

	Gravitation	Elektrizität
Kraftgesetz	$F_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F_C = k \cdot \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$
Kraft im entsprechenden Feld	$F_G = m \cdot g$	$F_C = q \cdot E$
Feldstärke	$g = G \frac{m_1}{r^2}$	$E = k \cdot \frac{ Q }{r^2}$
Charakteristische Grösse	Masse m	Ladung q

Tabelle 12.3.1: Analogien zwischen Gravitation und Elektrizität

12.3.1 Darstellung des elektrischen Feldes mittels Feldlinien

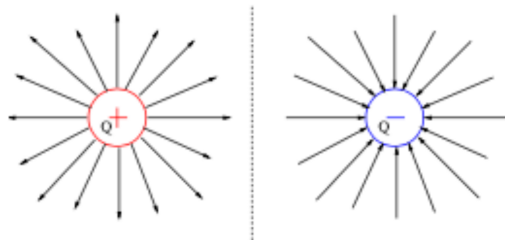


Abbildung 12.3.3: Darstellung des elektrischen Feldes mittels Feldlinien

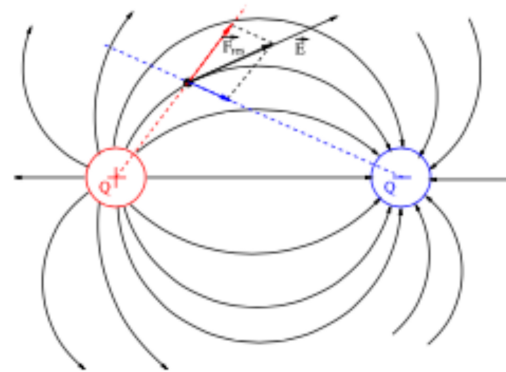


Abbildung 12.3.4: Darstellung des elektrischen Feldes mittels Feldlinien

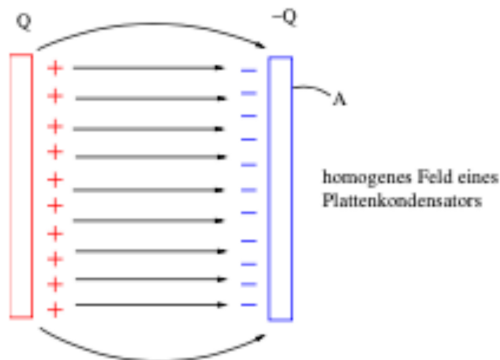


Abbildung 12.3.5: Homogenes Feld eines Plattenkondensators

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Metallplatten der jeweiligen Fläche A . Das elektrische Feld in einem Plattenkondensator der Fläche A und Ladung Q ist homogen und beträgt:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{|Q|}{A} \quad (12.3.7)$$

Homogen: In jedem Punkt im Raum (zwischen den Platten) hat das Feld die gleiche Stärke.

Beispiel: Ein Proton liegt an der positiven Innenseite eines Plattenkondensators der Ladung $Q = 3nC$ (Nanocoulomb) und der Fläche $A = 4dm^2$. Die beiden Platten liegen $d = 6cm$ voneinander entfernt. Bestimme die Beschleunigung und die maximale Geschwindigkeit des Protons.

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{F_C}{m} = \frac{E \cdot q}{m} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{|Q|}{A} \cdot q = \underline{\underline{8.11 \cdot 10^{11} m/s^2}} \quad (12.3.8)$$

$$\text{Aus } v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \Rightarrow v = \sqrt{2ad} = \underline{\underline{3.12 \cdot 10^5 m/s}}$$

Beispiel: Eine Ladung $q = 4nC$ der Masse $m = 3 \cdot 10^{-5} \text{kg}$ ist in einem homogenen elektrischen Feld der Stärke $E = 2 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$. Bestimme die Kraft auf die Masse und die Beschleunigung dieser. Wie sieht es aus, falls es sich beim Teilchen um einen Lithium-Kern handelt?

$$\begin{aligned} \text{Aus } F_C = E \cdot q &\Rightarrow 2 \cdot 10^6 \frac{N}{C} \cdot 4 \cdot 10^{-9} C = \underline{8 \cdot 10^{-3} N} \\ \text{Aus } F = ma \rightarrow a &= \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{8 \cdot 10^{-3} N}{3 \cdot 10^{-5} \text{kg}} = \underline{266.67 \text{m/s}^2} \end{aligned} \quad (12.3.9)$$

$$\begin{aligned} q_L = 3e &= 4.8 \cdot 10^{-19} C \rightarrow E \cdot q_L = \underline{9.61 \cdot 10^{-13}} \\ m_L = 7u &= 1.17 \cdot 10^{-26} \text{kg} \rightarrow \frac{F}{m} = \underline{8.2 \cdot 10^{13} \text{m/s}^2} \end{aligned}$$

Aufgabe:

- Bestimme das elektrisch Feld einer Punktladung $Q = -7nC$ im Abstand von 30 cm.

$$E = k \cdot \frac{|Q|}{r^2} = \underline{700 \frac{N}{C}} \quad (12.3.10)$$

Die Ladung zeigt in Richtung der Ladung Q .

- Im homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators ($Q = 2 \cdot 10^{-6} C$, $A = 400 \text{cm}^2$) wird ein Elektron von der negativen Innenseite zur positiven beschleunigt. Der Abstand der Platten beträgt $d = 1 \text{cm}$.

- Bestimme die Feldstärke zwischen den Platten des Kondensators.

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{|Q|}{A} = \underline{5.647 \cdot 10^6 \frac{N}{C}} \quad (12.3.11)$$

- Wie schnell wird das Elektron maximal? Gib die Geschwindigkeit in Prozenten der Lichtgeschwindigkeit ($c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$) an.

Aus der zeitfreien Gleichung folgt: $v = \sqrt{v_0^2 + 2a\Delta s}$. Mit $a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} = \frac{Ee}{m_e} = 9.9 \cdot 10^{17} \text{m/s}^2$ erhalten wir für $v = 1.41 \cdot 10^8 \text{m/s}$ was etwa 47% der Lichtgeschwindigkeit entspricht.

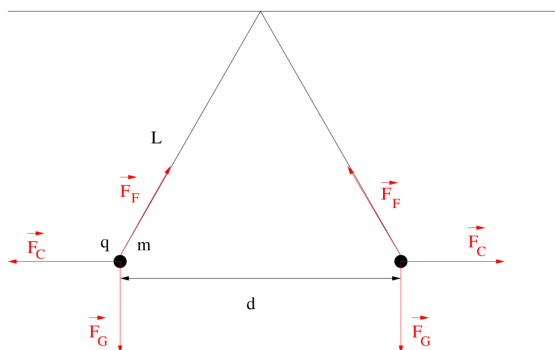
- In einem zweidimensionalen Koordinatensystem liegen drei Ladungen mit folgenden Koordinaten: $Q_1 = 4nC$ bei $(0, 0)$, $Q_2 = -2nC$ bei $(2 \text{cm}, 0)$ und $Q_3 = -7nC$ bei $(2 \text{cm}, 2 \text{cm})$. Mache eine Skizze und berechne die resultierende Kraft (als Vektor) auf Q_2 .

Einfaches Beispiel, da der Abstand von Q_1 zu Q_2 gleich ist wie von Q_3 zu Q_2 und die Kräfte nur entlang der x - bzw. y -Achsen wirken, also kein Cosinus oder Sinus nötig.

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = k \cdot \frac{|Q_2|}{r^2} \left[|Q_1| \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + |Q_3| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1.80 \cdot 10^{-4} N \\ -3.15 \cdot 10^{-4} N \end{pmatrix} \quad (12.3.12)$$

Die resultierende Kraft auf Ladung Q_2 ist: $\begin{pmatrix} -1.80 \cdot 10^{-4} N \\ -3.15 \cdot 10^{-4} N \end{pmatrix}$

4. Zwei Holundermark-Kügelchen sind wie abgebildet aufgehängt. Beide sind gleich stark elektrisch aufgeladen. Die Länge der Seidenfäden beträgt je $L = 1.3m$, die Kügelchen haben eine Masse von je $m = 1.1g$. Die Mittelpunkte liegen $d = 10cm$ entfernt.
- a) Zeichne in die Skizze alle wirkenden Kräfte ein und beschrifte korrekt.



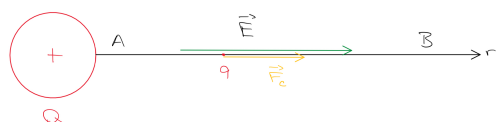
Skizze 12.10: Elektrostatik (Aufgabe)

- b) Bestimme die Ladung q auf einer Kugel.

Es gilt $\tan(\alpha) = \frac{F_C}{F_G}$ also $Q = \pm \sqrt{\frac{\tan(\alpha) \cdot mgr^2}{k}}$ mit $\sin(\alpha) = \frac{0.05m}{1.3m}$ erhält man $Q = \underline{\underline{\pm 2.148 \cdot 10^{-8}C}}$.

12.4 Die elektrische Spannung U

Lassen wir eine bewegliche Ladung q und A los, so wird sie vom elektrischen Feld in Richtung B beschleunigt (fall q negativ \Rightarrow in die andere Richtung).



Für die Beschleunigung der Ladung q muss das Feld (\vec{E}) die Beschleunigungsarbeit W_{AB} leisten.

Skizze 12.11: Elektrostatik (Theorie)

Definition: Die Spannung zwischen A und B entspricht der Beschleunigungsarbeit W_{AB} geteilt die beschleunigte Ladung:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} \quad [U] = \frac{J}{C} = V \text{ (Volt)} \quad (12.4.1)$$

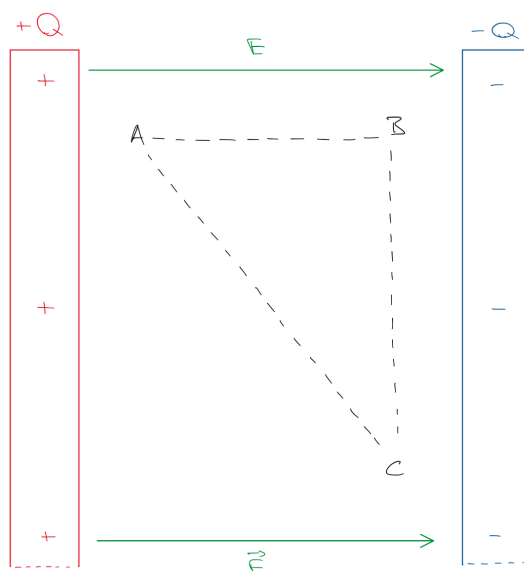
In den folgenden beiden Unterkapiteln berechnen wir jeweils die Spannung für unterschiedliche Felder:

12.4.1 Homogenes elektrisches Feld

Alle Feldlinien verlaufen parallel und die Feldstärke ist überall gleich \Rightarrow Plattenkondensator.

Aufgaben:

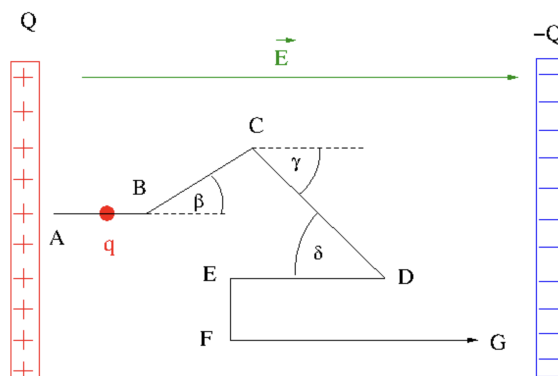
1. Geg.: $E = 12'000 \frac{V}{m}$, $\overline{AB} = 2cm$, $\overline{BC} = 3cm$
Ges.: U_{AB} , U_{BC} , U_{AC}



Skizze 12.12: Elektrostatik (Aufgabe)

$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{q} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{q} = \frac{\vec{F}_C \cdot \vec{AB}}{q} = \frac{F_C \cdot \overline{AB}}{q} = \frac{E \cdot q \cdot \overline{AB}}{q} = E \cdot \overline{AB} = 12'000 \cdot 0.02 = \underline{\underline{240V}} \\
 U_{BC} &= \frac{W_{BC}}{q} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{q} = \frac{\vec{F}_C \cdot \vec{BC}}{q} = \frac{F_C \cdot \overline{BC} \cdot \overbrace{\cos(90^\circ)}^0}{q} = \underline{\underline{0}} \\
 U_{AC} &= \frac{W_{AC}}{q} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{q} = \frac{\vec{F}_C \cdot \vec{AC}}{q} = \frac{E \cdot q \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\phi)}{q} = E \cdot \underbrace{\overline{AC} \cdot \cos(\phi)}_{\overline{AB}} = E \cdot \overline{AB} = \underline{\underline{240V}}
 \end{aligned}
 \tag{12.4.2}$$

2. Ein α -Teilchen (Heliumkern) wird im E-Feld eines Plattenkondensators ($Q = 8nC$, $A = 960cm^2$) bewegt. Das Feld zeigt in die positive x -Richtung.



Skizze 12.13: Elektrostatik (Aufgabe)

Gegeben: $\overline{AB} = 3cm$, $\overline{BC} = 4cm$, $\overline{CD} = 6cm$, $\overline{DE} = 5cm$, $\overline{EF} = 2cm$, $\overline{FG} = 8cm$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = \delta = 45^\circ$

- a) Bestimme die Feldstärke.

$$E = \frac{|Q|}{A\epsilon} = \underline{\underline{9'411.74 \frac{N}{C}}} \quad (12.4.3)$$

- b) Bestimme die Teilarbeiten für jeden Streckenabschnitt und die Summe dieser Arbeiten.

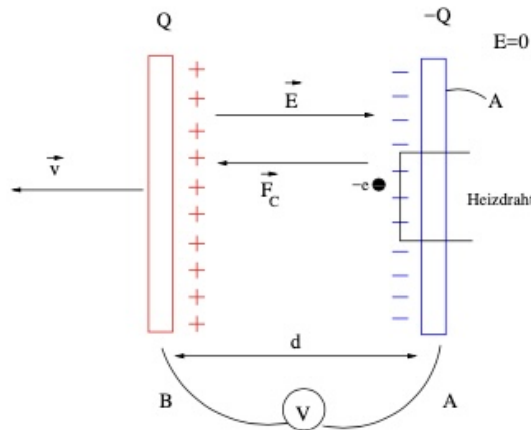
$$\begin{aligned} W_{AB} &= Eq \cdot \overline{AB} = \underline{9.05 \cdot 10^{-17} J} \\ W_{BC} &= Eq \cdot \overline{BC} = \underline{1.21 \cdot 10^{-16} J} \\ W_{CD} &= Eq \cdot \overline{CD} = \underline{1.81 \cdot 10^{-16} J} \\ W_{DE} &= Eq \cdot \overline{DE} = \underline{-1.51 \cdot 10^{-16} J} \\ W_{EF} &= Eq \cdot \overline{EF} = \underline{0J} \\ W_{FG} &= Eq \cdot \overline{FG} = \underline{2.41 \cdot 10^{-16} J} \\ W_{tot} &= \underline{\underline{4.13 \cdot 10^{-16} J}} \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

- c) Bestimme die Arbeit für den Abschnitt \overline{AG} .

$$\begin{aligned} x\text{-Ebene: } &3 + 4 \cos(30^\circ) + 6 \cos(45^\circ) + 3 = 13.71cm \\ y\text{-Ebene: } &(6 \sin(45^\circ) - 4 \sin(30^\circ)) + 2 = 4.24cm \\ &\sqrt{13.71^2 + 4.24^2} = 14.35cm = 0.1435m \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

$$W_{AG} = Eq \cdot s = \frac{|Q|}{A\epsilon} \cdot |-2e| \cdot 0.1435m = \underline{\underline{4.33 \cdot 10^{-16} J}}$$

Beispiel: Beschleuniger



Skizze 12.15: Elektrostatik (Beispiel)

Der Heizdraht verdampft Elektronen. Diese werden im E-Feld beschleunigt. Das Feld wird durch einen Plattenkondensator erzeugt, welches unter einer Spannung von $U = 1200V$ liegt. Nach dem Durchlaufen der Beschleunigungsspannung U_{AB} wird das Elektron aus dem Beschleuniger mit der Energie E_{kin} und der Geschwindigkeit \vec{v} ausgeschossen. Wir bestimmen die kinetische Energie und die Geschwindigkeit.

Durch die Energieerhaltung geht die Beschleunigungsarbeit W_{AB} in kinetische Energie E_{kin} über. Aus der Definition $U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} \Rightarrow U_{AB} \cdot q = \frac{1}{2}mv^2$.

$$1200V \cdot |(-e)| = 1200V \cdot e = 1200V \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}C = \underline{1.92 \cdot 10^{-16}J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2U_{AB} \cdot e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1200V \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}C}{9.11 \cdot 10^{-31}kg}} = 2.05 \cdot 10^7 m/s \approx 7\% \text{ von } c \tag{12.4.8}$$

Bemerkung: Im obigen Beispiel wird ein Elektron unter der Spannung von 1200 V auf die kinetische Energie $E_{kin} = 1200V \cdot e$ beschleunigt. Man kann die Energie auf folgendermassen schreiben: $E_{kin} = 1200eV$ (1200 Elektronenvolt).

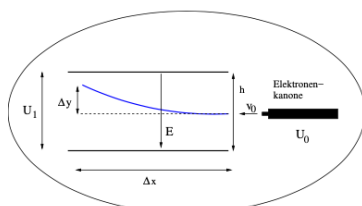
Diese (neue) Energieeinheit **Elektronenvolt** wird vor allem in der Atom- und Teilchenphysik verwendet.

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}J \tag{12.4.9}$$

Experiment: Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Feld.

Geg.: $U_0 = 2000V$, $U_1 = 600V$, $h = 0.05m$, $\Delta x = 0.08m$

Ges.: Δy



Skizze 12.16: Elektrostatik (Experiment)

$$U_0 \cdot q = E_{kin}$$

$$U_0 \cdot q = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2U_0 \cdot q}{m_e}}$$

$$s = vt \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{v} \tag{12.4.10}$$

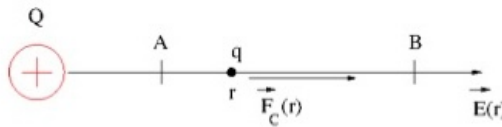
$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m_e} = \frac{qU_1}{m_e h}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 = \underline{9.6 \cdot 10^{-3}m}$$

12.4.2 Inhomogenes elektrisches Feld

... am Beispiel des radialen Feldes.

Dieses hängt von Ort r ab: $E(r)$. Als Beispiel betrachten wir das elektrische Feld einer (positiven) Punktladung Q .



Skizze 12.17: Elektrostatik (Theorie)

Um die Spannung zwischen A und B zu bestimmen, müssen wir die Arbeit berechnen, welche das Feld erbringt, um eine Probeladung q von A nach B zu beschleunigen. Wir können die gesamte Arbeit von A nach B jedoch nicht wie im homogenen Feld berechnen ($W_{AB} = F \cdot \overline{AB}$), weil die Kraft ja nicht konstant ist. Wir können jedoch die Kraft $F_C(r) = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$ für jeden Ort r bestimmen. Also berechnen wir eine Näherung für die Transportarbeit W_{AB} .

1. Unterteilen der Strecke $\overline{AB} = r_B - r_A$ in n gleich breite Abschnitte mit $\Delta r = \frac{r_B - r_A}{n}$
2. Berechne die Kraft am Anfang jeden Abschnitt: $F(r_i) = k \cdot \frac{Q \cdot q}{(r_A + i \cdot \Delta r)^2}$
3. Berechne die Einzeltransportarbeit für jeden Abschnitt $W_i = F(r_i) \cdot \Delta r$
4. Berechne die Näherung der Transportarbeit W_{AB} als Summe der Einzelarbeiten $W_{AB} \approx W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} W_i = \sum_{i=0}^{n-1} F(r_i) \cdot \Delta r$

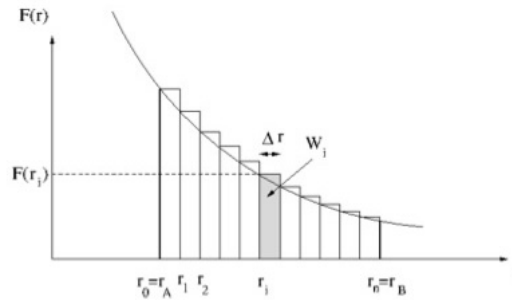


Abbildung 12.4.1: $F(r)$ in Abhängigkeit von r

Je mehr Streifen wir machen, desto besser ist die Näherung, d.h. je grösser n desto kleiner Δr und desto genauer die Näherung. Wenn $n \rightarrow \infty$ ($\Delta r \rightarrow 0$), dann Näherung perfekt.

$$\begin{aligned}
 W_{AB} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(r_i) \cdot \Delta r \\
 W_{AB} &= \int_{r_A}^{r_B} F(r) \, dr = \int_{r_A}^{r_B} k \frac{Q \cdot q}{r^2} \, dr \\
 &= -k \cdot Q \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \\
 &= k \cdot Q \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)
 \end{aligned}
 \tag{12.4.11}$$

Und da ja die Spannung U_{AB} gesucht war, müssen wir die Transportarbeit W_{AB} nur noch durch die Probeladung q dividieren:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{k \cdot Q \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}{q} = k \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{12.4.12}$$

Also gilt nun:

$$U_{AB} = k \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{12.4.13}$$

Aufgabe: Bestimme nach obigem Vorgehen (Summe von Teilarbeiten) die Verschiebungsarbeit im E-Feld der Punktladung $Q = 4 \cdot 10^{-7}C$, die nötig ist, um eine Testladung $q = 3 \cdot 10^{-8}C$ von $r_A = 10cm$ zu transportieren. Unterteile dazu das Intervall in 5 gleichgrosse Intervalle. Bestimme auch die Spannung zwischen A und B. Löse diese Aufgaben zum Gleich auch exakt mit dem Integral.

$$U_{AB} = k \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \underline{\underline{3.6 \cdot 10^4 V}} \tag{12.4.14}$$

Einige in der Elektrotechnik verwendete Symbole:

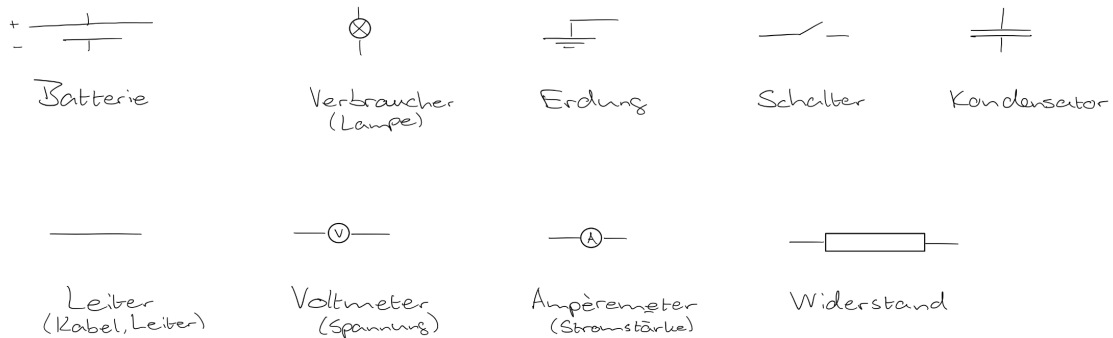
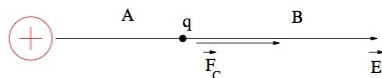


Abbildung 12.4.2: Einige Symbole der Elektrotechnik

12.5 Potential

Wir betrachten die gleiche Situation wie bei der Definition der Spannung im vorherigen Kapitel.



Skizze 12.18: Elektrostatik (Theorie)

Verschieben wir den Punkt B nach rechts bis ∞ , dann erhalten wir die Spannung $U_{A\infty}$, welche auch **Potential** ϕ_A im Punkt A genannt wird.

Definition:

$$\phi_A = \lim_{B \rightarrow \infty} U_{AB} = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{W_{AB}}{q} \quad [\phi] = V \tag{12.5.1}$$

Beispiel: Wir bestimmen das elektrische Potential einer Punktladung $Q = 4nC$ im Abstand von 10cm von der Ladung. Vergleiche obige Skizze. A ist 10cm von Quelle und B ist im Unendlichen:

$$\phi_A = \lim_{B \rightarrow \infty} U_{AB} = \lim_{r_B \rightarrow \infty} k \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = k \cdot \frac{Q}{r_A} = 360V \tag{12.5.2}$$

Es gilt:

$$U_{AB} = \phi_A - \phi_B \tag{12.5.3}$$

Beweis:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{W_{A\infty} + W_{\infty B}}{q} = \frac{W_{A\infty}}{q} + \frac{W_{\infty B}}{q} = \frac{W_{A\infty}}{q} - \frac{W_{B\infty}}{q} = U_{A\infty} - U_{B\infty} = \phi_A - \phi_B \quad (12.5.4)$$

q.e.d.

Es ergibt sich folgende Formel für das elektrische Potential einer Punktladung Q im Abstand r der Punktladung:

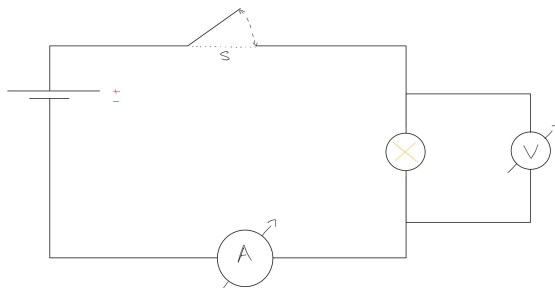
$$\phi_r = k \cdot \frac{Q}{r} \quad (12.5.5)$$

Achtung! Beim Potential wird das Vorzeichen der Ladung berücksichtigt! Hat man mehrere Ladungen im Raum, so ist das resultierende Potential im Punkt P die Summe der Einzelpotentiale am Punkt P .

$$\phi(P) = \sum_{i=1}^n \phi_i(P) = \sum_{i=1}^n k \cdot \frac{Q_i}{r_i} \quad (12.5.6)$$

Beispiel: Es existieren zwei Punktladungen $Q_1 = 2nC$ bei $P_1(4m; -2m)$ und $Q_2 = -3nC$ bei $P_2(-2m; 2m)$. Wir suchen das Potential im Ursprung.

$$\phi_A = \phi_A(P_1) + \phi_A(P_2) = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} = \frac{k \cdot 2 \cdot 10^{-9}C}{\sqrt{20}m} - \frac{k \cdot 3 \cdot 10^{-9}C}{\sqrt{8}m} = \underline{\underline{-5.52V}} \quad (12.5.7)$$



Skizze 12.19: Elektrostatik (Aufgabe)

Die potentielle Energie E_{pot} einer Ladung q an einem „Ort“ mit Potential ϕ ist:

$$E_{\text{pot}} = \phi \cdot q \quad (12.5.8)$$

Beispiel: Wir berechnen das Potential im Wasserstoffatom am „Ort“ des Elektrons:

$$\phi = k \frac{Q}{r} = k \frac{e}{r_B} = k \frac{1.6 \cdot 10^{-19}C}{0.529 \cdot 10^{-10}m} = \underline{\underline{27.2V}} \quad (12.5.9)$$

Aufgaben:

1. In einem homogenen E-Feld der Stärke $E = 10^6 \frac{N}{C}$ wird ein Elektron auf einem geschlossenen Kreis mit Radius $r = 4cm$ geführt. Bestimme die Transportarbeit für einen vollen Kreis.
Null. Für die Arbeit von Belang ist nur die Verschiebung entlang der Feldlinien, also (Endpunkt minus Anfangspunkt) und die ist für einen geschlossenen Kreis Null.
2. Eine Punktladung $Q = 8nC$ sitzt im Vacuum. Wir betrachten zwei Punkte A und B, wobei A eine Entfernung von 12cm und B eine von 40cm von der Punktladung haben.

- a) Bestimme die Spannung zwischen A und B.
Es handelt sich um ein inhomogones Feld: $U_{AB} = kQ \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = 420V$. Die Spannung zwischen A und B beträgt: $U = 420V$.
- b) Wie gross ist die Arbeit, um ein Proton von B ins Unendliche zu befördern.
 $W = kQq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty} \right) = 2.88 \cdot 10^{-17} J$. Das Feld muss eine Arbeit von $W = 2.88 \cdot 10^{-17} J$ aufwenden, um ein Proton von B ins Unendliche zu befördern.
3. Es ist eine Punktladung $Q = -12nC$ gegeben.
- a) Bestimme die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten A und B, wobei A 3cm und B 9cm von der Punktquelle entfernt sind.
 $U = kQ \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = -2400V$. Zwischen A und B herrscht eine Spannung von $-2400V$.
- b) Welche Arbeit verrichtet das Feld, um ein Elektron von A bis ins Unendliche zu transportieren?
 $W_{A\infty} = kQq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty} \right) = 5.76 \cdot 10^{-16} J$. Um ein Elektron von A ins Unendliche zu transportieren, verrichtet das Feld eine Arbeit von $5.76 \cdot 10^{-16} J$.
4. Bei einem Plattenkondensator wird der Abstand zwischen den Platten verdoppelt.
- a) Was passiert mit der Stärke des elektrischen Feldes zwischen den Platten?
Bleibt gleich, denn $E = \frac{|Q|}{\epsilon A}$.
- b) Was passiert mit der Spannung zwischen den Platte?
Spannung verdoppelt sich, denn $U = E \cdot d$.
5. Ein elektrisches Potential sei durch folgende Funktion gegeben: $\phi_r = \frac{3 \cdot 10^5 Vm}{r}$, wobei r der Abstand von der Quelle bedeutet. Bestimme die Spannung zwischen zwei Punkten mit der Entfernungen von 30m bzw. 80m von der Quelle.

$$U_{AB} = \phi_A - \phi_B = \frac{3 \cdot 10^5 Vm}{30m} - \frac{3 \cdot 10^5 Vm}{80m} = 6250V \quad (12.5.10)$$

Die Spannung zwischen den beiden Punkten beträgt 6250 V.

6. Bestimme das Gesamtpotential im Ursprung eines Koordinatensystems, wenn folgende Konfiguration vorliegt: Ladung $Q_1 = +20nC$ am Ort (3m; 4m) und Ladung $Q_2 = -40nC$ am Ort (-10; 0m).

$$\phi_1 + \phi_2 = k \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right) = k \left(\frac{20 \cdot 10^{-9} C}{5m} + \frac{-40 \cdot 10^{-9} C}{10m} \right) = 0V \quad (12.5.11)$$

Das totale Potential im Ursprung hebt sich auf, ist also Null.

7. Auf der x -Achse hat es zwei Ladungen $Q_1 = 4nC$ und $Q_2 = -2nC$. Q_1 liegt im Ursprung und Q_2 bei $x = 10cm$. Bestimme das totale elektrische Potential im Punkt P(10cm; 10cm).

$$\phi = \sum_{i=1}^2 \phi_i = k \frac{Q_1}{r_1} + k \frac{Q_2}{r_2} = k \left(\frac{4nC}{0.1414m} + \frac{-2nC}{0.1m} \right) = 74.60V \quad (12.5.12)$$

Das Potential beträgt im Punkt P 74.60V.

Beispiele:

1. *Potential von zwei Punktladungen:* Auf der x -Achse befinden sich zwei Punktladungen von $5nC$, von denen eine im Koordinatenursprung und die andere bei $x = 8cm$ liegt. Ermittle das Potential...

- a) ... im Punkt P_1 auf der x -Achse bei $x = 4cm$.

$$\begin{aligned}\phi(P_1) &= \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} \\ &= \frac{k \cdot 5nC}{0.04m} + \frac{k \cdot 5nC}{0.04m} \\ &= \frac{2k \cdot 5nC}{0.04m} = \underline{\underline{2250V}}\end{aligned}\quad (12.5.13)$$

- b) ... im Punkt P_2 auf der y -Achse bei $y = 6cm$.

$$\phi(P_2) = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} = \frac{k \cdot 5}{0.06} + \frac{k \cdot 5}{0.1} = \underline{\underline{1200V}}\quad (12.5.14)$$

- c) ... Was ist wenn in a) die eine Ladung negativ ist?

$$\phi'(P_1) = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} = \frac{k \cdot 5}{0.04} + \left(-\frac{k \cdot 5}{0.04}\right) = \underline{\underline{0}}\quad (12.5.15)$$

Der Bezugspunkt mit $\phi = 0$ soll im Unendlichen liegen.

2. Wir bestimmen die potentielle Energie des Elektrons im Wasserstoffatom.

$$E_{\text{pot}} = \phi \cdot q = 27.22V \cdot (-1e) = \underline{\underline{-27.22eV}}\quad (12.5.16)$$

13 Der elektrische Strom I

Sich bewegende elektrische Ladungen stellen einen elektrischen Strom dar. Ströme finden wir:

- in Leitern (Metalle, Kabel, Drähte), es bewegen sich die e^-
- Flüssigkeiten mit Ionen (Salzwasser mit Na^+ & Cl^-)
- als Plasma („Gas“ aus freien Elektronen und Atomrümpfen)
- in Vakuum (z.B. Elektronenstrahl in alten Fernsehen)

Wir legen die Stromrichtung und -stärke fest:

- Die Richtung des Stromes entspricht der Flussrichtung der positiven Ladungen bzw. entgegen der Flussrichtung der negativen Ladung.
- Die Stromstärke entspricht den Betrag der Ladung, welche pro Sekunde einen Querschnitt passiert:

$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t} \quad [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (Ampère)} \quad (13.1)$$

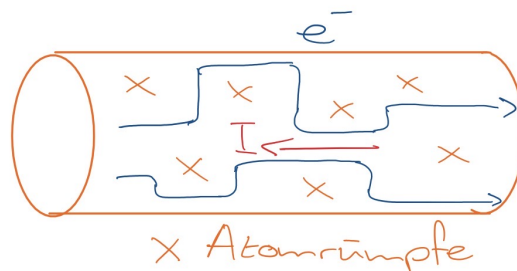
Damit ein Strom zustande elektrisches Feld vorhanden sein, und dieser erhält man durch eine Spannung.

Beispiele:

1. Es fließen $8 \cdot 10^{17}$ Elektronen in 7s durch einen Leitungsquerschnitt. Wir bestimmen die Stromstärke:

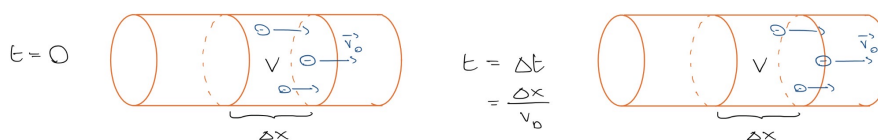
$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t} = \frac{|8 \cdot 10^{17} \cdot (-e)|}{7} = \frac{8 \cdot 10^{17} \cdot e}{7} = \underline{1.83 \cdot 10^{-2} A} \quad (13.2)$$

2. Wir bestimmen die sog. **Driftgeschwindigkeit** v_D der Elektronen in einem Kupferdraht mit $1mm^2$ Querschnittsfläche und 2A Stromstärke. Modellvorstellung:



Skizze 13.1: Elektrostatik (Beispiel)

Die Leitungselektronen bewegen sich um die Atomrümpfe, um am Strom teilzunehmen. Nicht jedes Kupfer-Elektron nimmt am Strom teil, sondern „nur“ $n_{Cu} = 11.6 \cdot 10^{28} m^{-3}$. n_{Cu} nennt man die Ladungsträgerdichte (von Kupfer).

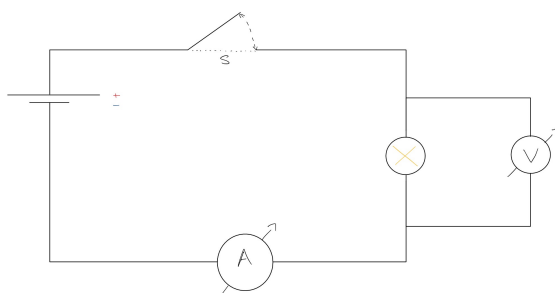


Skizze 13.2: Elektrostatik (Beispiel)

$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t} = \frac{|\#e^- \text{ im Volumen } V \cdot (-e)|}{\Delta t} = \frac{n_{Cu} \cdot V \cdot e}{\frac{\Delta x}{v_D}} = \frac{n_{Cu} \cdot A \cdot \Delta x \cdot e}{\frac{\Delta x}{v_D}} = n_{Cu} A v_D e$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{I}{n_{Cu} A e} = \frac{2A}{11.6 \cdot 10^{28} m^{-3} \cdot 10^{-6} m^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C} = 1.08 \cdot 10^{-4} m/s \approx \underline{\underline{40 cm/h}} \quad (13.3)$$

Experiment: Wir messen die Stromstärke und den Spannungsabfall an einer Glühlampe.



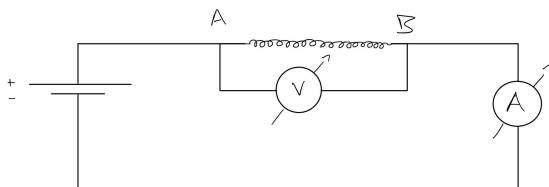
Skizze 13.3: Elektrostatik (Experiment)

Merke: Strom misst man *im* Schaltkreis, Spannung *parallel* zum Verbraucher.

13.1 Das Ohm'sche Gesetz

Um Elektronen durch einen Draht hindurchzudrücken, ist eine Transportarbeit nötig. Metalle sind keine idealen Leiter, sondern stellen den Elektronen einen Widerstand entgegen. Um diesen Widerstand zu überwinden und somit einen Strom zu erzeugen, ist eine Spannung zwischen den Drahtenden notwendig.

Experiment: Wir messen die Stromstärke in Abhängigkeit der Spannung.

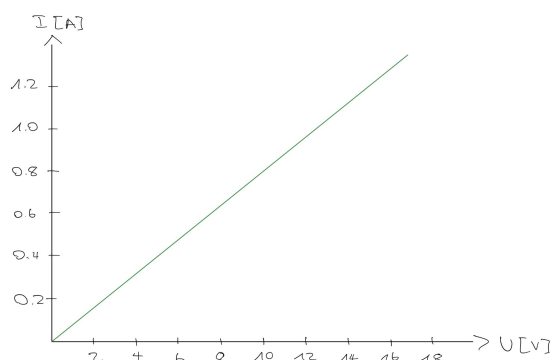


Skizze 13.4: Elektrostatik (Experiment)

U	0	2	4	5	10	[V]
I	0	0.16	0.32	0.4	0.8	[A]

Tabelle 13.1.1: Messwerte der Stromstärke in Abhängigkeit der Spannung

Graphisch: I in Abhängigkeit von U

Abbildung 13.1.1: I in Abhängigkeit von U

Man sieht, dass I und U einen linearen Zusammenhang haben.

Mathematisch:

$I = \alpha \cdot U$ mit α der Steigung des Graphen $\alpha = \frac{I}{U} = \frac{0.8A}{10V} = 0.08$. Der Kehrwert dieser Steigung heisst **elektrischen Widerstand R** : $\frac{1}{\alpha} = R \Rightarrow U = \frac{I}{\alpha} = R \cdot I$.

$$U = R \cdot I \quad \text{OHM'sche Gesetz} \quad (13.1.1)$$

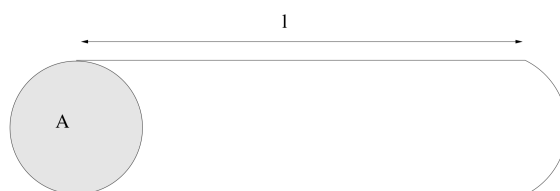
mit:

- U der Spannung zwischen der beiden Enden in V
- R dem Widerstand des Drahtes in Ω („Ohm“)
- I dem Strom durch den Draht A

Bei unserem Draht ist $R = 12.5 \Omega$.

13.2 Spezifischer Widerstand ρ_{el}

Wovon hängt der Widerstand eines Drahtes ab?



Skizze 13.5: Elektrostatik (Theorie)

- R ist umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche A : $R = \text{Konstante} \cdot \frac{1}{A}$
- R ist direkt proportional zur Länge l des Drahtes: $R = \text{Konstante} \cdot l$
 \Rightarrow fixe Zahl $\cdot \frac{l}{A}$. Diese Zahl ist vom Material abhängig und heisst **spezifischer Widerstand ρ_{el}** .

$$R = \rho_{el} \cdot \frac{l}{A} \quad (13.2.1)$$

Der spezifische Widerstand hängt von der Temperatur ab.

Beispiel: Wie gross ist der Widerstand eines 1m langen Kupfer-Drahtes mit 2mm^2 Querschnittsfläche?

$$R = \rho_{\text{el, Cu}} \cdot \frac{l}{A} = 1.754 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \cdot \frac{1\text{m}}{2 \cdot 10^{-6} \text{m}^2} = \underline{\underline{8.77 \cdot 10^{-3} \Omega}} \quad (13.2.2)$$

Experiment: Verschiedene Drähte Spannung anlegen und Strom messen, etc.

Beispiel: Durch Stanzen und Dehnen wird ein Draht auf die doppelte Länge gestreckt (immer noch zylinderförmig). Wie verändert sich dabei der anfängliche Widerstand R_0 des Drahtes?

$$R_0 = \rho \frac{l_0}{A_0} \text{ und } R = \rho \frac{l}{A} \text{ mit } l = 2l_0 \text{ und } A = \frac{A_0}{2}$$

denn $V_0 = A_0 \cdot l_0 = V = A \cdot l$ (13.2.3)

Somit wird $R = \rho \frac{2l_0}{\frac{A_0}{2}} = 4R_0$

13.3 Elektrische Energie und Leistung

Analogie zwischen Wasserkreislauf und elektrischem Kreislauf:

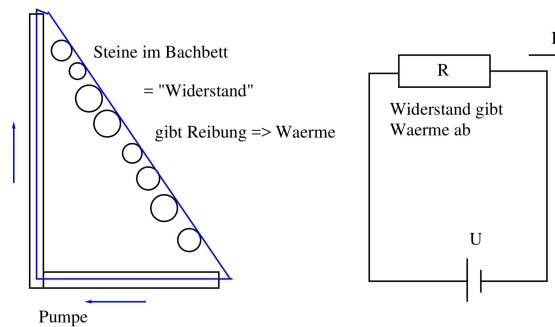


Abbildung 13.3.1: Analogie: Wasserkreislauf und elektrischer Kreislauf

In einem Widerstand wird elektrische Energie in Wärme umgewandelt. Wie man sieht, herrscht zwischen dem einen und dem anderen Ende des Widerstandes die Spannung U . Man sagt, es fällt über dem Widerstand die Spannung U ab.

Wie viel Energie wird in Δt Sekunden im Widerstand R in Wärme umgewandelt? Wir benutzen zwei bekannte Definitionen:

$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t} \text{ Ladung, die pro Sekunde durch } R \text{ transportiert wird.}$$

$$U = \frac{W_{AB}}{|\Delta Q|} \text{ Transportarbeit für die Verschiebung dieser Ladung durch } R, \text{ dividiert durch die transportierte Ladung.}$$

Aus der Energieerhaltung folgt, dass diese Verschiebungsarbeit der elektrischen Energie entspricht, welche in R durch Reibung in Wärme umgewandelt wird.

$$E_{\text{el}} = W_{AB} = |\Delta Q| \cdot U = I \cdot \Delta t \cdot U$$

$$E_{\text{el}} = I \cdot U \cdot \Delta t \stackrel{U=RI}{=} R \cdot I^2 \cdot \Delta t = \frac{U^2}{R} \cdot \Delta t \quad (13.3.1)$$

Daraus ergibt sich für die elektrische Leistung:

$$P_{\text{el}} = \frac{E_{\text{el}}}{\Delta t} = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (13.3.2)$$

mit:

- E_{el} : elektrische Energie $[E_{\text{el}}] = J$
- P_{el} : elektrische Leistung $[P_{\text{el}}] = W$
- U : elektrische Spannung $[U] = V$
- I : Strom durch den Widerstand $[I] = A$
- R : Widerstand $[R] = \Omega$
- Δt : Zeit, während welcher Strom fliesst $[t] = s$

Die elektrische Energie wird oft auch in Kilowattstunden (kWh) angegeben: $1kWh = 3.6 \cdot 10^6 J$.

13.4 Parallel- und Serieschaltung von Widerständen

Widerstände können in einem Schaltkreis auf zwei verschiedene Arten geschaltet werden:

- **parallel** der Strom muss sich aufteilen, um die Widerstände zu passieren
- **seriell** der Strom fliesst zuerst durch den einen dann durch den anderen Widerstand

In diesem Kapitel geht es darum, komplizierte Schaltungen von Widerständen (parallele und serielle) durch vereinfachte Schaltkreise zu ersetzen. Man sucht somit nach dem sog. **Ersatzwiderstand** R_E .

13.4.1 Parallelschaltung

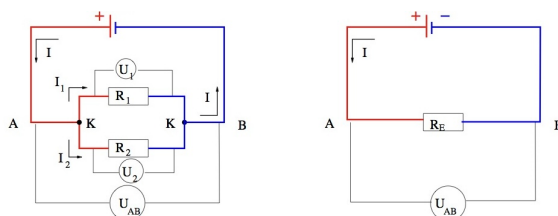


Abbildung 13.4.1: Parallelschaltung

- Im Knoten K wird der Strom I in zwei Teilströme I_1 und I_2 aufgeteilt: $I = I_1 + I_2$
- Parallele Widerstände werden i.A. von verschiedenen Strömen durchflossen
- Parallele Widerstände haben die gleiche Anschlussspannung: $U_{AB} = U_1 = U_2$.

Wie gross müsste der Ersatzwiderstand R_E zwischen A und B sein, damit bei gleicher Anschlussspannung U_{AB} in der Hauptleitung der gleiche Strom I fliesst?

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} = U_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U_{AB} \cdot \frac{1}{R_E} \quad (13.4.1)$$

Daraus folgt für einen Ersatzwiderstand R_E in einer **Parallelschaltung** von n Einzelwiderständen:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (13.4.2)$$

13.4.2 Serieschaltung

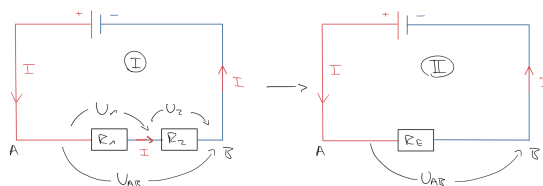


Abbildung 13.4.2: Serieschaltung

- Die Summe der Einzelspannungen entspricht der Gesamtspannung:

$$\sum_{i=1}^n U_i = U_{AB} \tag{13.4.3}$$

- Serielle Widerstände werden vom gleichen Strom durchflossen.
- Die einzelne Spannungsabfälle sind im i.A. verschieden.

I.

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= U_{AB} \\ R_1 I + R_2 I &= U_{AB} \end{aligned} \tag{13.4.4}$$

II.

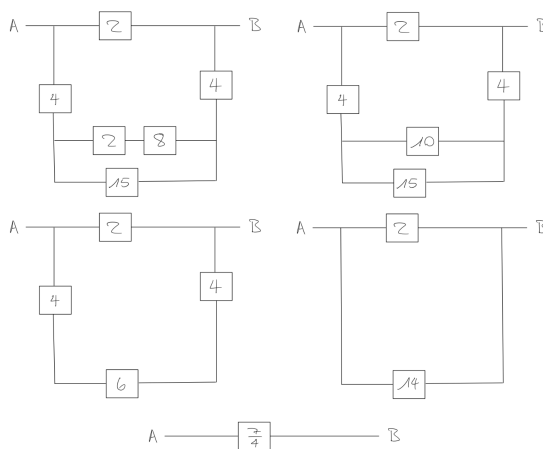
$$R_E I = U_{AB} \tag{13.4.5}$$

$$\Rightarrow R_1 I + R_2 I = R_E I \Rightarrow R_1 + R_2 = R_E$$

Der Ersatzwiderstand einer Serieschaltung aus n Einzelwiderständen ist:

$$R_E = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \tag{13.4.6}$$

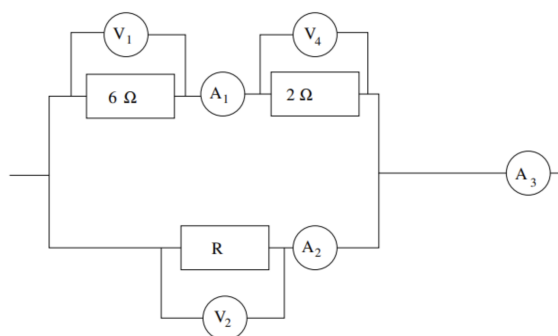
Beispiel: Bestimme den Ersatzwiderstand zwischen A und B.



Skizze 13.6: Elektrostatisches Beispiel

Aufgaben:

1. Die Volt- und Ampèremeter seien ideale Instrumente und zeigen folgende Werte an: $U_2 = 24V$, $I_2 = 6A$. Bestimme R . Welche Werte zeigen die anderen Instrumente an?



Skizze 13.7: Elektrostatik (Aufgabe)

$$\begin{aligned}
 R &= 4\Omega \\
 I_1 &= 3A \\
 U_1 &= 18V \\
 U_4 &= 6V \\
 I_3 &= 9A
 \end{aligned}
 \tag{13.4.7}$$

2. Zwei Lampen ($L_1 = 230V$, $60W$ und $L_2 = 230V$, $100W$) werden I) seriell und II) parallel an $230V$ angeschlossen.

- a) Bestimme den Einzelwiderstand und die Soll-Stromstärke für jede Lampe.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} \Rightarrow R_1 = \underline{\underline{881.67\Omega}} \quad R_2 = \underline{\underline{529\Omega}} \\
 P &= UI \Rightarrow \frac{P}{U} = I \Rightarrow I_1 = \underline{\underline{0.26A}} \quad I_2 = \underline{\underline{0.43A}}
 \end{aligned}
 \tag{13.4.8}$$

- b) Wie gross sind Ersatzwiderstand, Stromstärke und Leistung jeder Lampe in den Schaltungen I) und II)

$$\begin{aligned}
 \text{I) } R_E &= R_1 + R_2 = \underline{\underline{1410.67\Omega}} \\
 I &= \frac{U}{R} = \underline{\underline{0.16A}} \\
 P &= R \cdot I^2 \Rightarrow P_1 = \underline{\underline{23.44W}} \quad P_2 = \underline{\underline{14.06W}}
 \end{aligned}
 \tag{13.4.9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } R_E &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \underline{\underline{330.625\Omega}} \\
 I &= \frac{U}{R} \Rightarrow I_1 = \underline{\underline{0.26A}} \quad I_2 = \underline{\underline{0.43A}} \\
 P &= RI^2 \Rightarrow P_1 = \underline{\underline{60W}} \quad P_2 = \underline{\underline{100W}}
 \end{aligned}$$

3. Ein Heizstrahlen enthält zwei Heizdrähte. Diese können mit einem Schalter einzeln, parallel oder seriell an 220V angeschlossen werden. So können die Heizstufen I (schwach), II und III (stark) eingestellt werden. Der kleinste Heizwiderstand beträgt 60Ω und auf Stufe III beträgt die Heizleistung 484W.

Wie gross sind die Widerstände der Heizdrähte und mit welcher Leistung wird in jeder Stufe geheizt?

$$R_1 = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2 V}{484 W} = \underline{100\Omega}$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{100} \right)^{-1} = \underline{150\Omega}$$

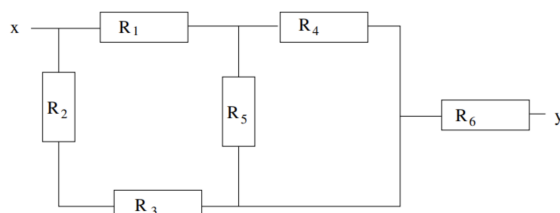
$$P_1 = \frac{220^2 V}{100\Omega + 150\Omega} = \underline{193.60 W} \quad (13.4.10)$$

$$P_{2_1} = \frac{220^2 V}{100\Omega} = \underline{484 W}$$

$$P_{2_2} = \frac{220^2 V}{150\Omega} = \underline{322.67 W}$$

$$P_3 = \frac{220^2 V}{60\Omega} = \underline{806.67 W}$$

4. Welche Widerstände sind in Serie, welche sind parallel geschaltet? Es ist $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 15\Omega$, $R_6 = 5\Omega$. Bestimme den Ersatzwiderstand R_{xy} .



Skizze 13.8: Elektrostatik (Aufgabe)

R_2 und R_3 seriell; R_4 und R_5 parallel. $R_{xy} = 10.09\Omega$

5. Eine kleine Lampe (Nennwerte: 3V, 2A) soll über einen Vorschaltwiderstand so an eine 6V-Batterie angeschlossen werden, dass das Lämpchen mit der Nennleistung brennt. Gesucht: Nennleistung P_N , Lampenwiderstand R_L , Vorschaltwiderstand R_V , Leistung P_B , welche die Batterie abgeben muss.

$$P_N = IU = 2A \cdot 3V = \underline{6W}$$

$$R_L = \frac{U}{I} = \underline{1.5\Omega}$$

$$R_V = \frac{U}{I} = \frac{6V - 3V}{2A} = \underline{1.5\Omega}$$

$$P_B = IU = \underline{12W}$$

(13.4.11)

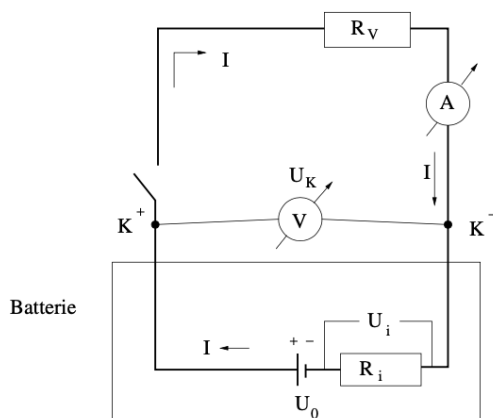
13.5 Der Innenwiderstand R_i einer Batterie

Abbildung 13.5.1: Innenwiderstand einer Batterie

Wir messen, wenn der Schalter offen ist: $U_K = 4.5V$, $I = 0$

Wir messen, wenn der Schalter geschlossen ist: $U_K = 3.8V$, $I = 0.9A$

Ein Teil der intrinsischen Spannung U_0 wird verwendet, um die Elektronen durch den sog. **Innenwiderstand R_i** zu „drücken“. Der Rest steht als **Klemmspannung U_K** zur Verfügung.

Der Verbraucherwiderstand R_V und der Innenwiderstand R_i sind seriell geschaltet, das heisst $R_E = R_V + R_i$.

Weiter gilt $U_K = R_V \cdot I$ bzw. $U_i = R_i \cdot I \Rightarrow U_0 = R_E \cdot I = (R_V + R_i)I = R_V I + R_i I = U_K + U_i$

$$\Rightarrow U_K = U_0 - U_i = U_K = U_0 - R_i I \quad (13.5.1)$$

Beispiele:

- Wir bestimmen den Innenwiderstand „unserer“ Batterie.

Offener Schalter: $U_K = U_0 - R_i \cdot 0A = U_K = \underline{4.5V}$

Geschlossener Schalter: Aus $U_K = U_0 - R_i I \Rightarrow R_i = \frac{U_0 - U_K}{I} = \frac{4.5V - 3.8V}{0.9A} = \underline{\underline{\frac{7}{9}\Omega}}$ (13.5.2)

- Gleiches Schaltbild wie oben.

Geg.: $R_V = 15\Omega$, $U_0 = 1.5V$, $R_i = 1.5\Omega$

Ges.: U_K , I

$$R_E = R_V + R_i = \underline{16.5\Omega}$$

$$\text{Aus } U_K = U_0 - I \cdot R_i = 1.5V - 0.09A \cdot 1.5\Omega = \underline{1.36V} \quad (13.5.3)$$

$$\text{Aus } U = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R_E} = \frac{1.5V}{16.5\Omega} = \underline{0.09A}$$

3. Zwei Verbraucherwiderstände $R_1 = R_2 = 2\Omega$ werden parallel an die Batterie ($U_0 = 4.5V$) angeschlossen. Durch R_1 fließt dann der Strom $I_1 = 1.5A$. Bestimme R_i und U_K .

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2 = 2I_1 = 3A \\R_E &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = 1\Omega \\U_K &= R_E I = 1\Omega \cdot 3A = \underline{3V} \\U_i &= U_0 - U_K = 4.5V - 3V = 1.5V \\U_i &= R_i I \Rightarrow R_i = \frac{U_i}{I} = \frac{1.5V}{3A} = \underline{0.5\Omega}\end{aligned}\tag{13.5.4}$$

14 Magnetismus

14.1 Permanentmagnete

In der Natur gibt es Erze (metallhaltige Mineralien), welche Eisen, Nickel und Kobalt anziehen bzw. abstossen. Ist ein Objekt in der Lage andere Metalle anzuziehen oder bei Umkehrung abzustossen, nennt man es ein **Permanentmagnet** oder **Magnet**. Ein Permanentmagnet hat immer zwei Pole: einen Nord- und einen Südpol.

Ein frei beweglicher Magnetstab stellt sich in etwa Nord-Süd-Richtung ein. Das nach geographisch Norden weisende Ende des Magneten heisst **magnetischer Nordpol** der Magneten.

Gleiche Pole stossen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

Einfache Modellvorstellung: Alle Materialien enthalten viele kleine **Elementarmagnete**. Sind diese ausgerichtet, so ist das Material magnetisch, sonst nicht. Sind die Elementarmagneten ungeordnet \Rightarrow nicht magnetisch; sind sie geordnet \Rightarrow magnetisch.

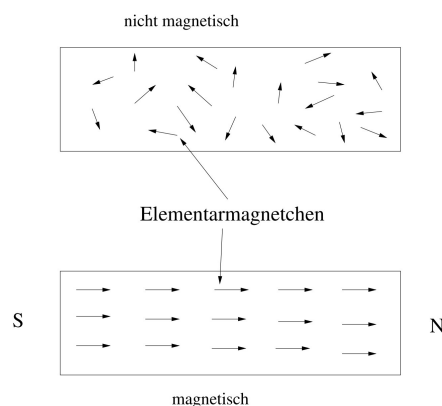


Abbildung 14.1.1: Modellvorstellung durch Elementarmagneten

Bemerkung: Magnete weisen keine Monopole auf, sondern immer Dipolen, d.h. es kommen keine Nord- oder Südpole einzeln vor, sondern immer in Paaren (im Gegensatz zu positiven und negativen Ladungen in der Elektrizitätslehre).

Bemerkung: Ein magnetischer Dipol wird von seinem magnetischen Feld umgeben. Die Feldlinien verlaufen ausserhalb des Magneten vom Nordpol zum Südpol. Der magnetische Nordpol wird immer rot gezeichnet, der Südpol entweder grün oder blau.

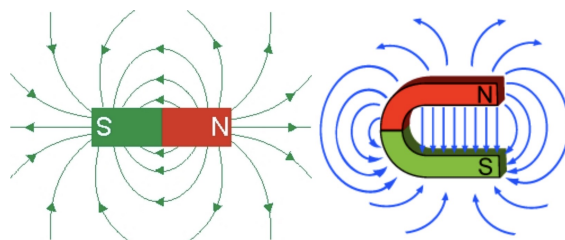


Abbildung 14.1.2: Feldlinien von Magneten

Die Feldlinien zeigen immer von magnetisch Nord nach magnetisch Süd.

14.2 Elektromagnetismus

1820 entdeckte der dänische Physiker Hans Christian Orsted: „Ein elektrischer Strom erzeugt ein Magnetfeld“. Das Magnetfeld ist ein Vektorfeld und wird mit \vec{B} bezeichnet.

Das magnetische Feld \vec{B} heisst streng genommen **magnetische Flussdichte**. Es wird aber synonym verwendet. Die Berechnung der Stärke der Flussdichte ist kompliziert, und es wird deshalb nur eine Auswahl einfacher Geometrien von stromdurchflossenen Leitern als Beispiele angegeben. Die Einheit der magnetischen Flussdichte heisst **Tesla**: $[B] = T = \frac{V \cdot s}{m^2}$.

Rechte-Hand-Regel:

Zeigt der gestreckte Daumen der rechten Hand in die Richtung des elektrischen Stromes, so zeigen die gekrümmten Finger in die Richtung des erzeugten Magnetfeldes.

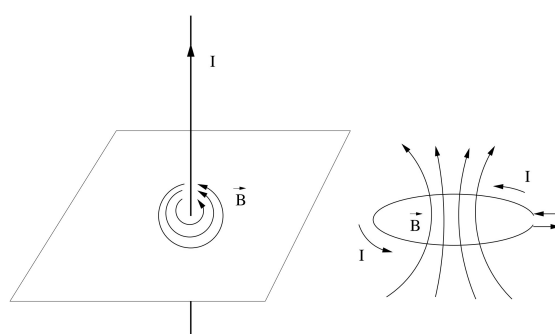


Abbildung 14.2.1: Richtung des elektrischen Stromes

Die magnetische Flussdichte eines unendlich langen geraden stromdurchflossenen Leiters im Punkt P :

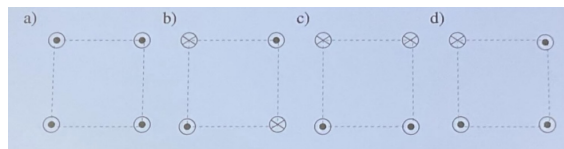
$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (14.2.1)$$

mit:

- B dem Betrag der magnetischen Flussdichte, $[B] = T$
- $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
 - $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$ der magnetischen Feldkonstanten
 - μ_r der materialabhängigen Permeabilitätszahl (Vacuum: $\mu_r = 1$, Luft: $\mu_r \approx 1$, Eisen: $\mu_r = [200; 5000]$)
- I der Stromstärke des Leiters $[I] = A$
- r dem senkrechten Abstand der Drahtachse zum Punkt P : $[r] = m$

Die Stärke des Erdmagnetfeldes liegt in der Grössenordnung von $10^{-5}T$ bis $10^{-4}T$. Starke Permanentmagnete weisen einige Tesla auf. Mit Elektromagneten können noch stärkere magnetische Flussdichten erreicht werden. Mehr als ein paar Dutzend Tesla können zur Zeit kaum erzeugt werden.

Aufgabe: Vier lange, parallele Drähte, welche in den vier Ecken eines Quadrates mit Kantenlänge s stehen, führen den jeweils gleich starken Strom I senkrecht zur Blattebene:



Skizze 14.1: Magnetismus (Aufgabe)

Ordne die vier Quadrate a) bis d) nach zunehmender Stärke des resultierenden Magnetfeldes im Zentrum des jeweiligen Quadrates.

$$a = b < c < d \quad (14.2.2)$$

Die Stärke des Magnetfeldes im Zentrum eines Kreisstromes (Radius r und Stromstärke I) ist:

$$B = \frac{\mu I}{2r} \quad (14.2.3)$$

Bemerkung: Elektromagnete werden mit stromdurchflossenen Spulen (mit Durchmesser d , Länge l und N Windungen) erzeugt.

Die magnetische Flussdichte im Zentrum einer vom Strom I durchflossenen Spule mit Durchmesser d , Länge l und N Windungen beträgt:

$$B = \frac{N\mu I}{\sqrt{l^2 + d^2}} \quad (14.2.4)$$

Handelt es sich um eine schlanke Spule ($l \gg d$), so gilt:

$$B \approx \frac{N\mu I}{l} \quad (14.2.5)$$

Beispiel: Wir haben eine 8cm lange und 2cm dicke Spule mit 10'000 Windungen pro Meter. Wir lassen einen Strom $I = 3A$ fließen.

$$\begin{aligned} \text{Exakt: } B &= \frac{N\mu I}{\sqrt{l^2 + d^2}} = 0.0366T \\ \text{Näherung: } B' &= \frac{N\mu I}{l} \\ \text{Abweichung in \%: } &\frac{B' - B}{B} \cdot 100 = 3.01\% \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

14.3 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in \vec{F}_M

Experiment: Ein Draht hängt in einem homogenen Magnetfeld. Sobald der Strom eingeschaltet wird, erfährt der Draht eine Kraft senkrecht zur Magnetfeld- und zur Stromrichtung.

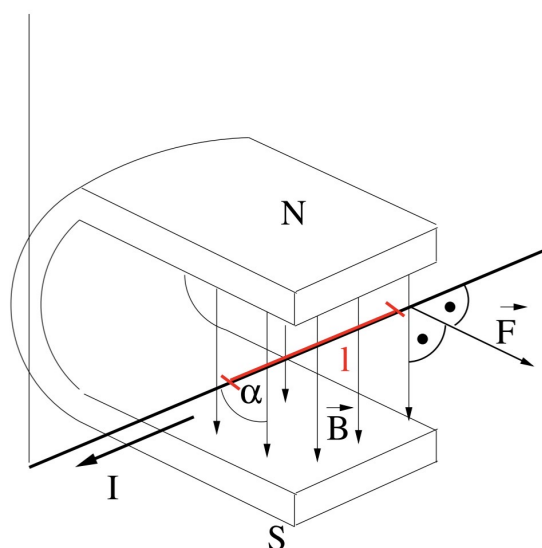


Abbildung 14.3.1: Kraft / Strom / Magnetfeld in einem Hufeisenmagnet

Diese magnetische Kraft wird mit dem Vektorprodukt berechnet:

$$\vec{F}_M = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (14.3.1)$$

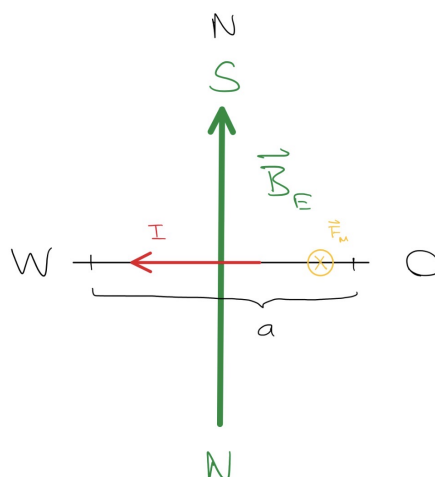
Der Betrag dieser Kraft ist: $F_M = l \cdot I \cdot B \cdot \sin \alpha$ mit:

- \vec{F}_M äusseres Magnetfeld
- l Länge des im Magnetfeld liegenden Leiterstücks [l] = m
- I Stromstärke [I] = A
- B Stärke der magnetischen Flussdichte [B] = T
- α Winkel zwischen Strom- und Magnetfeldrichtung
- F Kraft auf das Leiterstück [F] = N

Die Richtung der Kraft entspricht der Drei-Finger-Regel der rechten Hand:

1. Zeigefinger: Stromrichtung
2. Mittelfinger: Magnetfeldrichtung
3. Daumen: Richtung der Kraft

Beispiel: Die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes \vec{B}_E betrage an einem bestimmten Ort $B_E = 19\mu T$. Berechne Kraft und Richtung auf eine in Ost-West verlaufende Freileitung, welche einen Strom $I = 100A$ transportiert. Der Abstand zwischen zwei Masten beträgt $a = 150m$.



Skizze 14.2: Magnetismus (Beispiel)

$$\vec{F}_M = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F_M = IlB \cdot \underbrace{\sin \phi}_1 = IaB_E = \underline{\underline{0.29N}} \tag{14.3.2}$$

14.4 Die Lorentzkraft \vec{F}_L

Überlegung zum stromdurchflossenen Leiter im äusseren Magnetfeld: fliesst ein Strom, wirkt eine Kraft. Fliesst kein Strom, wirkt keine Kraft.

Frage: Was ist Strom? Bewegte Ladungen (hier bewegte Elektronen). D.h. haben die Elektronen eine Geschwindigkeit, so wirkt die Kraft. Ist die Geschwindigkeit null, so wirkt keine Kraft.

Ziel ist es, die Kraft auf ein einzelnes Elektron zu bestimmen. Beginne mit der Kraft auf den ganzen Draht:

$$F_M = l \cdot I \cdot B \cdot \sin \alpha \tag{14.4.1}$$

Es habe N Elektronen im Drahtstück der Länge l . Sie haben alle die Geschwindigkeit v . Nach $\Delta = \frac{l}{v}$ haben alle N Elektronen das Drahtstück verlassen. Dann ist

$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t} = \frac{N \cdot e}{\frac{l}{v}} = \frac{N \cdot e \cdot v}{l} \tag{14.4.2}$$

und somit ist die Kraft auf den ganzen Leiter

$$F_M = l \cdot \frac{N \cdot e \cdot v}{l} \cdot B \cdot \sin \alpha = N \cdot e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha \tag{14.4.3}$$

und auf ein einzelnes Elektron N mal kleiner.

$$F_L = \frac{F}{N} = e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha \tag{14.4.4}$$

Diese Kraft nennt man **Lorentzkraft** \vec{F}_L .

Allgemein: Ist eine elektrische Ladung q in einem äusseren Magnetfeld \vec{B} und hat eine Geschwindigkeit \vec{v} , so wirkt auf die Ladung die Lorentzkraft \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{14.4.5}$$

mit:

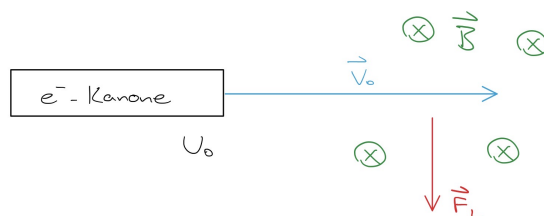
- q der Ladung in C (kann positiv oder negativ sein)
- \vec{v} dem Geschwindigkeitsvektor der Ladung in m/s
- \vec{B} dem Magnetfeldvektor in T
- α dem Winkel zwischen \vec{v} und \vec{B}
- \vec{F}_L der Lorentzkraft in N

Der Betrag der Lorentzkraft ist: $F_L = |q|vB \sin \alpha$. Die Richtung der Lorentzkraft ergibt sich wieder aus der Drei-Finger-Regel der rechten Hand:

1. Zeigefinger: Richtung der Geschwindigkeit der Ladung
2. Mittelfinger: Richtung des Magnetfeldes
3. \Rightarrow Daumen: Richtung der Lorentzkraft

Beispiel: Elektronen werden horizontal aus einem Beschleuniger geschossen. Die Beschleunigungsspannung ist $U_0 = 2.5 \cdot 10^3 V$. Danach wird das homogene, raumerfüllende Magnetfeld der Stärke $B = 0.01 T$, welches auch horizontal liegt und aus der Sicht der Elektronen nach links zeigt, eingeschaltet.

Bestimme Betrag und Richtung der Lorentzkraft.



Skizze 14.3: Magnetismus (Beispiel)

$$F_L = |q|v_0 B \underbrace{\sin \alpha}_1 = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 2.96 \cdot 10^7 m/s \cdot 0.01 T = \underline{\underline{4.74 \cdot 10^{-14} N}}$$

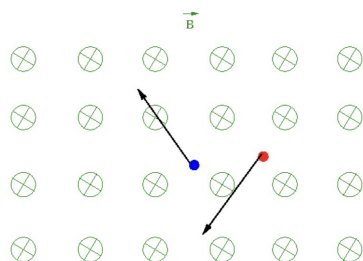
$$W_{AB} = U_{AB} \cdot q = U_0 e = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = E_{kin} \tag{14.4.6}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2U_0 e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^3 V \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C}{9.1 \cdot 10^{-31} kg}} = 2.96 \cdot 10^7 m/s$$

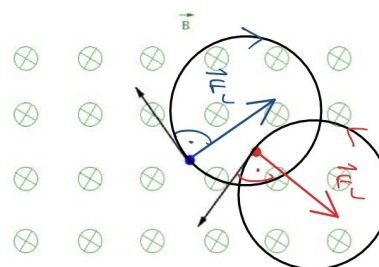
Aufgaben:

1. Gekreuzte Felder: Elektronen werden durch eine Beschleunigungsspannung $U_0 = 200 V$ auf eine Geschwindigkeit v gebracht (nach rechts). Dann treten sie in eine Kammer, in welcher ein homogenes magnetisches Feld in dieser Kammer sein und in welche Richtung muss es zeigen, damit die Elektronen keine resultierende Kraft verspüren?
Magnetfeld muss nach vorne gerichtet sein mit der Stärke $B = 5.96 T$

2. Eine Spule hat N Windungen, eine Länge von $l = 12\text{cm}$ und einen Durchmesser von $d = 2\text{cm}$. Man sucht das Magnetfeld im Innern der Spule. Wie gross ist der prozentuale Fehler den man macht, wenn man diese Spule als „schlanke“ Spule betrachtet, anstelle einer nicht schlanken Spule.
1.38%
3. Ein ${}^6\text{Li}$ -Kern wird durch eine Beschleunigungsspannung $U_0 = 500\text{V}$ beschleunigt und kommt dann in ein homogenes Magnetfeld der Stärke $B = 0.8\text{T}$, welches unter einem Winkel $\phi = 20^\circ$ zum Geschwindigkeitsvektor des Litium-Kerns steht.
- Bestimme die Geschwindigkeit des Litium-Kerns nach dem Durchlaufen der Beschleunigungsspannung.
 $v = 2.195 \cdot 10^5\text{m/s}$
 - Bestimme den Betrag der Lorentzkraft auf den Kern im Magnetfeld.
 $F = 2.88 \cdot 10^{-14}\text{N}$
4. Zeichne die Richtung der Lorentzkraft direkt in die Graphik ein. Beschreibe und skizziere in eindeutigerweise die Bahn, welche die Ladung (blau - negative Ladung, rot - positive Ladung) vollführt.



Skizze 14.4: Magnetismus (Aufgabe)



Skizze 14.5: Magnetismus (Aufgabe)

A Anhang

Allgemeinwissen

Sir Isaac Newton:

Er wurde am Weihnachtstag des Jahres 1642 (nach unserem Kalender der 4.1.1643; bis 1752 wurde in England nach dem alten Kalender gerechnet) in der Grafschaft Lincoln in England geboren. Es war das Todesjahr Galileos. Newton starb am 20. März 1727 (bzw. 31.3. nach dem korrigierten Kalender). Er ist in der Westminster-Abtei in London begraben. In der Zeit nach 1700 war von der damals bekannten Mathematik mehr als die Hälfte Newton zu verdanken. Die „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ oder kurz „*Principia*“ von 1687 gelten auch heute noch als das grösste wissenschaftliche Buch, das je von einem einzigen Mann geschrieben wurde. Newton ging bald an das Trinity College in Cambridge. Von ihm ist der Ausdruck „Wenn ich etwas weiter sah als andere, so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stand“. Zu den grössten dieser Riesen zählten Descartes mit seiner analytischen Geometrie; von Kepler erbt er die drei Grundgesetze der Planetenbewegung, und von Galilei übernahm er die beiden ersten Bewegungsgesetze. Doch erst Newton schuf die Bewegungslehre und die Gesetze der Himmelsmechanik. Als noch nicht einmal 25-jähriger erkannte Newton auch erstmals, dass Differential- und Integralrechnung eng und wechselseitig miteinander durch eine Beziehung verbunden sind. Es ist der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung. Newton arbeitete erstmals mit Begriffen wie Variable, Funktion und Grenzwert, und 1669 - als 27-jähriger - übernahm er den Lehrstuhl für Mathematik (Lucasian Professor in Cambridge). 1687 wurde die „*Principia*“ der Royal Society vorgelegt. Obwohl nur wenige Zeitgenossen der Grösse des Geschaffenen folgen konnten, bestaunten viele dieses Wunderwerk an Vereinheitlichung. Es war auch die Blütezeit der Mathematik. Die besten Köpfe auf dem Kontinent und in England stellten sich gegenseitig schwierige Aufgaben. Nicht unerwähnt soll der Prioritätsstreit von Newton mit Leibniz um die Erfindung der Differential- und Integralrechnung bleiben. Das Brachystochrone Problem: Welche Form hat die Kurve, entlang der ein Körper (ohne Reibung) vom oberen Punkt zum unteren unter Einfluss der Schwerkraft in der kürzesten Zeit heruntergleitet? Die europäischen Mathematiker hatten Arbeit für etwa sechs Monate, Newton löste die Aufgabe in einem Tag (Ergebnis: Zykloide; *mathematik.ch* 2024).

James Prescott Joule:

James Prescott Joule (1818-1889) war ein britischer Physiker. Er wurde 1818 am Weihnachtsabend in Salford bei Manchester geboren. Sein Vater war Besitzer einer Bierbrauerei. James konnte bis zum 15. Lebensjahr aufgrund eines angeborenen Rückenleidens nicht die Schule besuchen und wurde zusammen mit seinem älteren Bruder Benjamin von Privatlehrern unterrichtet. Als James sechzehn Jahre alt war, wurde er mit seinem Bruder Benjamin zum berühmten Naturforscher John Dalton (1766 - 1844) geschickt, dem Begründer der Atomtheorie. Dieser alte Herr war bettelarm und musste sich seinen Lebensunterhalt durch Privatstunden verdienen. Mit besonderer Liebe nahm er sich der beiden Söhne des reichen Bierbrauers an und brachte, ihnen die Grundzüge der Arithmetik, Algebra und Geometrie bei.

James Prescott Joule wurde durch seine Forschungsarbeiten zur Elektrizität und Thermodynamik berühmt. Im Verlauf seiner Untersuchungen zur Wärme, die in einem elektrischen Stromkreis ausgestrahlt wird, formulierte er 1840 das Gesetz der elektrischen Erwärmung, das man heute das JOULE'sche Gesetz nennt. Nach diesem Gesetz ist die Wärmemenge, die ein elektrischer Strom in jeder Sekunde in einem Leiter erzeugt, dem Widerstand des Leiters und dem Quadrat des Stromes proportional. Mit seinen Untersuchungen zur Umwandlung mechanischer Energie in Wärmeenergie konnte Joule das Gesetz von der Erhaltung der Energie experimentell bestätigen. Mit Hilfe vieler voneinander unabhängiger Methoden bestimmte Joule die numerische Beziehung zwischen Wärme und mechanischer Energie, das mechanische Wärmeäquivalent. Die Einheit der Energie, das so genannte Joule, wurde nach ihm benannt. Es entspricht einer Wattsekunde. Gemeinsam mit dem Physiker William Thomson (später Lord Kelvin) fand Joule heraus, dass die Temperatur eines Gases bei einer Ausdehnung gegen einen Widerstand ohne äussere Arbeitsleistung sinkt. Dieses Phänomen, das als Joule-Thomson-Effekt bezeichnet wird, liegt den herkömmlichen Verfah-

ren von Kühlung und der Funktionsweise klimatechnischer Anlagen zugrunde. In seinem letzten Lebensjahrzehnt wurde es still um den grossen Gelehrten. Seine Lebenskraft war gebrochen, seine Gesundheit verschlechterte sich, oft litt er unter hartnäckigem Nasenbluten. Noch in seinem Sterbebett war er der irrtümlichen Meinung, nichts wirklich Grossartiges geleistet zu haben. Nach langer Krankheit starb er am 11. Oktober 1889 in Sale bei London.

Die goldene Krone und Archimedes

Im ersten Jahrhundert vor Christus berichtet der römische Architekt Vitruvius wie Archimedes den Betrug an der Herstellung der goldenen Krone von Hiero, dem König von Syrakus, entlarvte. Die Krone hatte die Form eines Kranzes, wie man sie auf Bildern von mazedonischen Grabstätten sieht. Hiero wollte diesen Kranz wahrscheinlich einer Gottesstatue aufsetzen.

Doch er hatte den Verdacht, dass die Krone nicht nur aus Gold war, sondern dass ein Teil des Goldes durch Silber ersetzt worden war. Das Gewicht der Krone war jedoch identisch mit dem Gewicht des Goldes, das dem Goldschmied übergeben worden war.

Hiero liess Archimedes kommen und bat ihn herauszufinden, ob die Krone aus purem Gold sei oder nicht. Da die Krone ein heiliges Objekt war, musste Archimedes eine Methode finden, bei der der Kranz nicht beschädigt wurde.

Archimedes gab nicht auf, bis er das Geheimnis lösen konnte. Er dachte lange darüber nach, bis er eines Tages eine Idee hatte. Er war gerade dabei sich fürs Bad fertigzumachen, die Wanne war bis oben hin voll. Als er dann hineinstieg, lief das Wasser über, wie schon Hunderte Male zuvor. Doch dies war das erste Mal, dass er darüber nachdachte. Er fragte sich, wie viel Wasser er wohl verschüttet habe. Er erkannte sofort, dass das verschüttete Wasser dem Volumen seines Körpers entsprach.

Jetzt versuchte Archimedes das Gleiche mit der Krone. Da Gold viel schwerer ist als Silber, ist das Volumen von 10 Pfund purem Gold kleiner als das von 7 Pfund Gold und 3 Pfund Silber.

Besteht die Krone also aus purem Gold, verdrängt sie die gleiche Menge Wasser wie ein anderes Objekt aus 10 Pfund purem Gold. Doch als er den Test mit der Krone machte, entdeckte er, dass mehr Wasser überlief, woraus er schliessen konnte, dass der Kranz nicht aus purem Gold war, sondern dass es sich um ein Gemisch handelt. „Heureka!“ („Ich habe es gefunden“) soll Archimedes bei dieser Entdeckung gerufen haben.